

А. В. Абрамов, А. П. Бекетов,  
Г. Н. Рыкованов, А. Н. Хрулёв,  
А. О. Чернявский

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООВОГО  
И НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПУНКТА  
ГЛУБИННОГО ЗАХОРОНЕНИЯ  
РАДИОАКТИВНЫХ ОТХОДОВ**

Препринт № 261

2019

## Оглавление

Список сокращений .....	2
Реферат .....	3
Введение .....	4
1. Верификация тепловых (термоупругих) расчетов МКЭ путем сравнения с аналитическими решениями .....	5
1.1. Задачи сплошного шара и шара с полостью в центре при постоянном и переменном тепловом потоке .....	6
1.2. Центральнo-симметричный источник в неограниченном однородном пространстве при мгновенном и распределенном во времени выделении тепла .....	12
1.3. Задача 7. Распределение температуры в ПГЗРО от источников тепла в виде стержней (использование принципа суперпозиции для конечного набора точечных источников) .....	19
1.4. Выводы по верификации тепловых (термоупругих) расчетов .....	22
2. Численное моделирование в связанной постановке температурных полей в ПГЗРО, в массиве окружающих пород и их упругого напряженного состояния .....	23
2.1. Описание расчетных моделей ПГЗРО и массива вмещающих пород .....	23
2.2. Анализ теплового состояния ПГЗРО и массива окружающих пород .....	25
2.3. Сравнение результатов расчетов теплового состояния ПГЗРО, полученных МКЭ аналитическим методом .....	28
2.4. Анализ напряженного состояния ПГЗРО и массива вмещающих пород .....	30
2.5. Обсуждение результатов решения в связанной постановке задачи оценки температурных полей и напряженного состояния ПГЗРО и массива окружающих пород .....	34
Заключение .....	35
Литература .....	36

## Список сокращений

РФЯЦ – ВНИИТФ	Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики
ИББ	инженерный барьер безопасности
ИБРАЭ РАН	Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук
КД	конструкторская документация
МКЭ (КЭМ)	метод конечных элементов
НС	напряженное состояние
ОЯТ	отработанное ядерное топливо
ПИЛ	подземная исследовательская лаборатория
ПГЗРО	пункт глубинного захоронения радиоактивных отходов
РАО	радиоактивные отходы
ВАО, САО	высокоактивные, среднеактивные отходы

## Реферат

Рассматривается задача расчета теплового и напряженного состояний (НС) вмещающих и окружающих пункт глубинного захоронения радиоактивных отходов (ПГЗРО) гранитных пород.

Для моделирования тепловых процессов и напряженного состояния в ПГЗРО использовался метод конечных элементов (МКЭ) и аналитические решения. Полученные результаты описывают пространственное и временное изменение температуры и НС внутри объема ПГЗРО и окружающей породы как цельного массива на период до 500 лет после начала помещения в скважины контейнеров с высокоактивными радиоактивными отходами (РАО) 1-го класса опасности.

Аналитическое решение задач для точечного источника энергии, суперпозиции точечных источников энергии в неограниченном однородном пространстве и шара хорошо согласуется с численными решениями (МКЭ), что обеспечивает определенную уверенность в корректности численных процедур.

Результаты решения рассмотренных задач показывают, что в течение небольших промежутков времени температура в ограниченном объеме ПГЗРО только от действия тепловых источников РАО 1-го класса опасности может превысить  $100^{\circ}\text{C}$ , при этом расчетные значения растягивающих, сдвиговых и сжимающих напряжений во вмещающей породе достигают предела прочности гранита.

## Введение

В настоящее время для изоляции радиоактивных отходов от биосферы рассматривается их размещение в пунктах глубинного захоронения радиоактивных отходов. Проектируемый в РФ пункт окончательной изоляции РАО (ПГЗРО) будет располагаться в массиве гранитных пород. Глубина расположения подземных сооружений составит до 525 м.

Согласно проекту ПГЗРО (рис. 1), остеклованные высокоактивные отходы (РАО 1-го класса опасности) будут размещены в вертикальных скважинах диаметром 1,3 м, глубиной 75 м, между двумя горизонтами (плюс 5 м и минус 70 м в балтийской системе отсчета), а долгоживущие РАО 2-го класса опасности – в камерах захоронения.

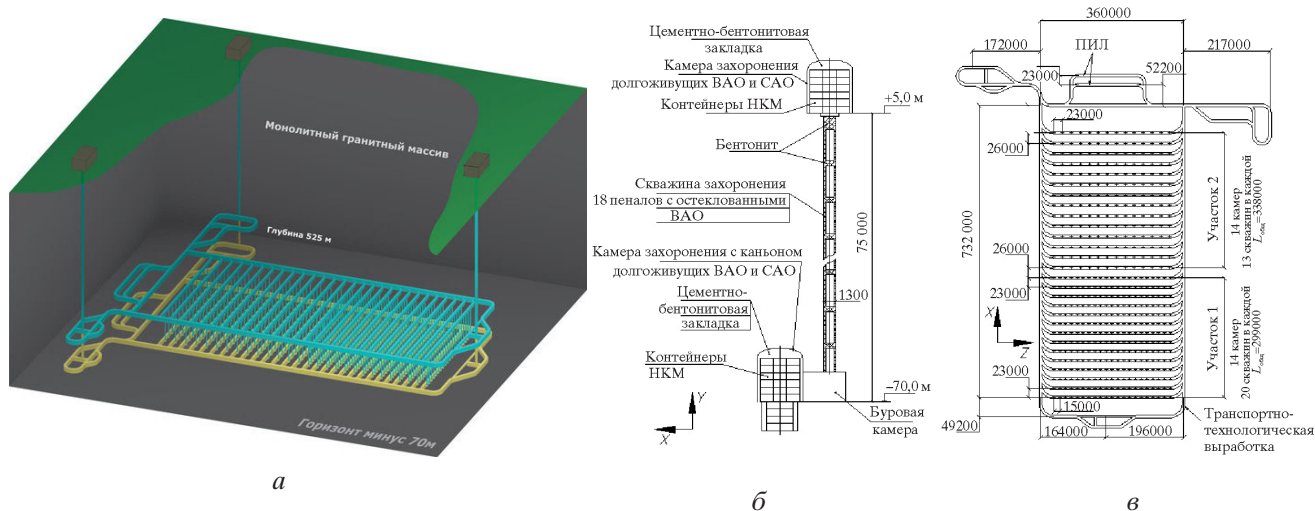


Рис. 1. Схема расположения РАО в ПГЗРО:

а – общий вид ПГЗРО; б – разрез двух уровней горизонтальных выработок камер и вертикальной скважины; в – вид сверху на горизонт +5 м

Пункт захоронения будет разделен на два участка, на первом из которых будут размещаться отходы, накопленные до 2010 года, имеющие начальное тепловыделение порядка 1 кВт/м<sup>3</sup>, на втором – накопленные после 2010 года, с начальным тепловыделением около 1,5–2 кВт/м<sup>3</sup> [3, 6].

Высокоактивные отходы (ВАО) размещаются в металлических пеналах, по 3 бидона. Объем ВАО в пенале – 0,6 м<sup>3</sup> (диаметр стекломатрицы 0,6 м), масса 1500 кг; бидон вмещает примерно 0,2 м<sup>3</sup> остеклованной массы весом 500 кг. Пространство между изолирующим контейнером (ИК, диаметр – 1,2 м) и стенкой скважины заполняется тиксотропным шликером или бентонитом.

Температура окружающей породы на глубине 400–500 м составляет 5–10°С. Среднегодовая температура вблизи поверхности земли – около 0°С.

Ограниченный отвод тепла от ВАО приводит к разогреву упаковок. До проведения расчетов были изучены результаты пяти опубликованных работ [1–5], в которых рассмотрено тепловое или напряженное состояние грунта около скважин ПГЗРО. Только в работе [3] рассмотрено изменение температуры от времени в материалах матрицы, контейнера и вмещающей ПГЗРО породы, распределение температуры по пространству захоронения и окружающей породе. Показано, что максимальные значения температуры достигаются в период 50–70 лет с начала заполнения ПГЗРО. В расчетах [3] задавался следующий порядок заполнения скважин захоронения (начало тепловыделения в скважине):

- каждый год, начиная с нулевого (начало расчета), последовательно заполнялся один ряд скважин: сначала на участке 1, затем на участке 2; тем самым в расчете начиналось тепловыделение заполненного ряда скважин;
- на первом участке в скважины помещались только ВАО с начальным тепловыделением  $1 \text{ кВт/м}^3$  и экспоненциальным спадом во времени;
- на втором участке в скважины помещались ВАО с начальным тепловыделением  $1,5 \text{ кВт/м}^3$  и экспоненциальным спадом во времени;
- тепловыделение от долгоживущих РАО 2-го класса опасности, расположенных в горизонтальных камерах не учитывалось.

В выполненном расчете [3] не определялось напряженное состояние по ПГЗРО и окружающей породе.

Знание НС по ПГЗРО и окружающей породе представляется важным аспектом для более достоверного моделирования эволюции состояния объекта, что важно для обеспечения его безопасности на длительный период жизненного цикла.

Используя исходные данные из работы [3], в такой же постановке, как ИБРАЭ РАН, проведем аналитическое и численное моделирование температурных полей в области скважин (инженерного барьера) и в массиве пород, сравним их с ранее опубликованными данными. Дополнительно, в связанной постановке (тепло плюс прочность) оценим напряженное состояние вмещающей породы на период до 500 лет после начала помещения в скважины контейнеров с высокоактивными РАО. Проведем оценку точности получаемых численным моделированием величин температур и напряжений.

Основным допущением в расчетах будет являться предположение, что грунт является однородным сплошным гранитным блоком. Как и в работе [3], источником тепла является тепловыделение от распада остеклованных РАО 1-го класса опасности (продукты деления, актиноиды, гамма – нейтронное излучение), располагаемых в скважинах захоронения. Тепловыделение долгоживущих РАО 2-го класса (ВАО, среднеактивные отходы – САО), расположенных в камерах захоронения, не учитывается.

Используя подход ИБРАЭ РАН, предполагалось, что моделируемый источник тепла имеет удельную эквивалентную мощность тепловыделения, уменьшающуюся по экспоненциальному закону  $q = q_0 \exp(-Bt)$  ( $q_0 = (1,0 \div 2,0) \text{ кВт/м}^3$ ;  $B = 0,025 \text{ 1/год}$ ). Тепловыделение было принято равномерно распределенным вдоль скважин.

## 1. Верификация тепловых (термоупругих) расчетов МКЭ путем сравнения с аналитическими решениями

Решение задачи, учитывающей сложную реальную геометрию подземных выработок, неоднородные по объему массива свойства материалов, сочетание механического (от собственного веса) и теплового (тепловыделение от распада РАО) нагружения, возможно только численными методами. На данный момент наиболее разработанным и потому предпочтительным представляется метод конечных элементов. К сожалению, существующие реализации этого метода не содержат средств, дающих гарантированную оценку ошибки, в отличие, например, от теории предельного анализа, в которой двойственные математические формулировки позволяют получать верхнюю и нижнюю оценки точного решения и оценивать погрешность по разнице этих оценок. Способом оценки погрешности в случае МКЭ является сопоставление численного решения с аналитическим для тех случаев, когда аналитические решения могут быть найдены, и для тех параметров и особенностей реализации счета, которые будут использованы при решении реальной задачи. Для повышения надежности оценок желательно использовать решения нескольких различных задач.

В соответствии с таким подходом ниже рассмотрен ряд задач, по возможности близких к поставленной задаче прочности вмещающего ПГЗРО массива пород, но упрощенных до состояния, допускающего аналитическое решение. Приведенные здесь же результаты численных расчетов позволяют оценить возможную погрешность МКЭ и установить минимальные требования к сетке конечных элементов (КЭ) при наличии определенных требований к точности результатов моделирования. Во всех примерах при решении задачи МКЭ использовались только те типы конечных элементов, которые позволяют решать симметричные и несимметричные задачи – полноинтегрируемые 2-мерные осесимметричные или 3-мерные.

## 1.1. Задачи сплошного шара и шара с полостью в центре при постоянном и переменном тепловом потоке

### 1.1.1. Задача 1. Сплошной шар при постоянном тепловом потоке на поверхности

Рассматривается сплошной (без полости в центре) шар радиусом  $R$  из однородного материала с плотностью  $\rho$ , теплопроводностью  $\lambda$  и теплоемкостью  $c$ . Начальная температура шара  $T_0$ . Начиная с момента времени  $t = 0$ , происходит теплообмен шара с окружающей средой, так что тепловой поток на наружной поверхности шара  $q$  является постоянным. Задачей является определение температур (и напряжений) на любом расстоянии  $r$  от центра шара и в любой момент времени  $t$ .

Аналитическое решение такой задачи имеет вид [7]

$$T(\xi, F_0) = \frac{qR}{\lambda} \left( 3F_0 + \frac{\xi^2}{2} - \frac{3}{10} - 2 \sum_{n=1}^k \frac{\sin(v_n \xi)}{v_n^2 \xi \sin(v_n)} \exp(-v_n^2 F_0) \right) + T_0, \quad (1)$$

здесь  $\xi = r/R$  – «безразмерный радиус»;  $F_0 = \frac{\lambda}{\rho c R^2} t$  – «безразмерное время»;  $k$  – число суммируемых членов ряда (точному решению отвечает  $k \rightarrow \infty$ );  $v_n$  – корни уравнения  $v = \text{tg } v$ .

По найденному распределению температуры могут быть определены тепловые напряжения. Если материал шара упругий и имеет модуль упругости  $E$ , коэффициент Пуассона  $\mu$  и коэффициент линейного теплового расширения  $\alpha$ , а внешняя поверхность шара свободна от напряжений, то радиальные  $\sigma_r$  и окружные  $\sigma_t$  напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_r(r, t) = \frac{-2\alpha E}{1-\mu} \frac{1}{r^3} \int_0^r T \left( \frac{r}{R}, \frac{\lambda}{\rho c R^2} t \right) r^2 dr + \frac{2\alpha E}{1-\mu} \frac{1}{R^3} \int_0^R T \left( \frac{r}{R}, \frac{\lambda}{\rho c R^2} t \right) r^2 dr; \quad (2)$$

$$\sigma_t(r, t) = \frac{r}{2} \left( \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} + \frac{2}{r} \sigma_r(r, t) \right). \quad (3)$$

Числовые значения теплофизических характеристик материала взяты (в качестве примера) из работы [3]:  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 840$  Дж/(кг·К),  $\lambda = 2,91$  Вт/(м·К) (заметим, что число членов ряда  $k$ , которое должно быть просуммировано для достижения определенной точности, существенно зависит от сочетания этих характеристик). Механические характеристики ( $E = 6,2 \cdot 10^4$  МПа,  $\mu = 0,22$ ,  $\alpha = 7,9 \cdot 10^{-6}$  1/К) – типичные для гранита. Радиус шара был принят равным  $R = 100$  м. Величина теплового потока выбиралась так, чтобы заметные (десятки градусов) изменения температур обнаруживались при временах порядка нескольких лет: при  $q = 5$  Вт/м<sup>2</sup> температура на наружной поверхности через 20 лет отличается от начальной на 72,7°C (градиент температуры в приповерхностном слое  $q/\lambda = 1,7$  К/м).

В качестве величины, характеризующей сетку конечных элементов, представляется удобным принять максимальный относительный перепад температур на одном элементе (получаемый при решении задачи):

$$\delta T = \max_i \frac{T_{max_i} - T_{min_i}}{T_{max_i}}. \quad (4)$$

здесь  $T_{max_i}$  и  $T_{min_i}$  – максимальная и минимальная температура в конечном элементе номер  $i$ ; максимум берется по всем конечным элементам модели. Даже при разных значениях теплофизических характеристик материала одинаковым значениям  $\delta T$ , как показали расчеты, отвечают близкие значения погрешностей в вычислениях температур и напряжений (для получения близких  $\delta T$  при разных теплофизических характеристиках материала нужны, естественно, разные размеры КЭ). Такой подход более универсален, чем указание линейного размера КЭ в метрах или долях радиуса шара (см., например, [3]), хотя он имеет и недостаток:  $\delta T$  определяется только после расчета. Но необоснованно надеяться, что решение реальной задачи может быть сделано путем однократного выполнения расчета, без предварительных пробных (оценочных) попыток. Отметим еще, что вычисление  $\delta T$  (как и прочих величин) зависит от выбранного типа КЭ (топология, квадратурные формулы и т. д.) и от особенностей постпроцессорной обработки (перенос результатов из точек интегрирования в узлы). Поэтому в тестовой и реальной задачах должен быть использован один и тот же программный продукт и один и тот же тип КЭ.

Сопоставление аналитического решения и численного решения, полученного МКЭ с использованием полноинтегрируемых элементов (квадратура  $2 \times 2$  для 4-узлового осесимметричного элемента), приведено в табл. 1. Графическое представление результатов приведено после описания верификационных примеров 1–4 (сводные результаты для примеров 1–4).

Таблица 1

Погрешности для задачи 1

Характеристика сетки, $\delta T$	Погрешности		
	$\Delta T$	$\Delta \sigma_t$	$\sigma_r / \sigma_t$
0,0186	-0,0001	0,0107	0,0250
0,0365	-0,0005	0,0205	0,0487
0,0723	-0,0018	0,0382	0,0951
0,1418	-0,0067	0,0646	0,1831
0,2699	-0,0178	0,0966	0,3371

Примечание:  $\delta T$  – относительный перепад температур на одном КЭ (характеристика сетки);  $\Delta T = (T_{числ} - T_{аналит}) / T_{аналит}$  – относительная погрешность определения температуры;  $\Delta \sigma_t = (\sigma_{tчисл} - \sigma_{tаналит}) / \sigma_{tаналит}$  – относительная погрешность определения окружного напряжения;  $\sigma_r / \sigma_t$  – отношение радиального напряжения к окружному на поверхности шара (точное решение  $\sigma_r / \sigma_t = 0$ , поскольку наружная поверхность шара предполагается свободной).

### 1.1.2. Задачи 2–4. Шар с полостью в центре

В работе [8] получено аналитическое решение задачи о нестационарном тепловом поле полого шара. Решение имеет достаточно общий вид, позволяющий учитывать:

- граничные условия вида «температура на поверхности есть произвольно заданная функция времени» или «тепловой поток через поверхность есть произвольно заданная функция времени» (на наружной и внутренней поверхностях допускаются условия разного вида);
- любое (центрально-симметричное) начальное распределение температуры;
- любое распределение объемного тепловыделения по радиусу.



Полученное в работе [8] решение является значительно более громоздким, чем решение задачи 1, имеет вид ряда, куда входят специальные функции (функции Бесселя и производные от них) и т. д. Аналитическое решение было реализовано в системе MathCAD.

### 1.1.2.1. Задача 2. Температура на наружной поверхности меняется скачком

Ниже рассмотрен вариант без внутреннего тепловыделения. Граничные условия:

- на наружной поверхности – в момент времени  $t=0$  температура меняется скачком от 0 до  $T_{out}=50^\circ\text{C}$ ;
- внутренняя поверхность теплоизолирована (нет теплового потока).

Сходимость рядов, описывающих решение, существенно зависит от отношения радиуса полости  $R_{in}$  к наружному радиусу области  $R_{out}$  (сходится хорошо при  $R_{in}/R_{out} \rightarrow 0$ ) и времени (сходится лучше при больших значениях времени).

Результаты, показанные ниже, получены для тех же свойств материала, что использованы в задаче 1:  $\rho=2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $c=840$  Дж/(кг·К),  $\lambda=2,91$  Вт/(м·К),  $E=6,2 \cdot 10^4$  МПа,  $\mu=0,22$ ,  $\alpha=7,9 \cdot 10^{-6}$  1/К, радиус шара  $R=100$  м, радиус полости  $R_{in}=10$  м (при рассматриваемых граничных условиях радиус внутренней полости практически не влияет на решение, но при использовании недостаточного числа членов ряда у поверхности полости возникает «всплеск» температуры, являющийся хорошо заметным признаком недостаточной точности суммирования в аналитическом решении).

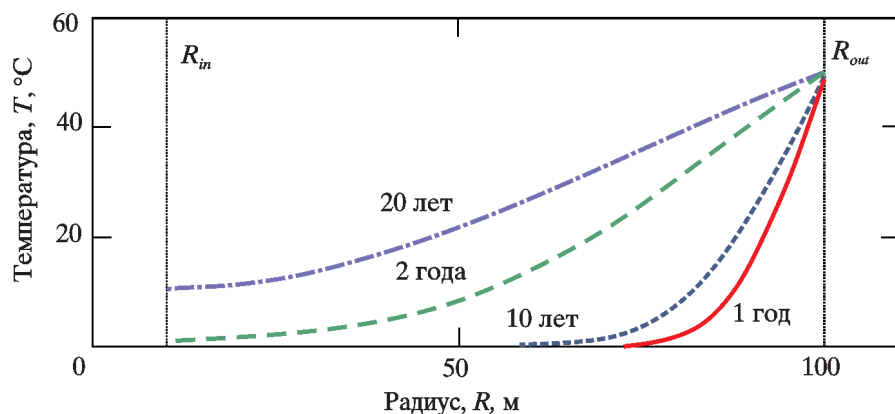


Рис. 2. Распределение температуры по радиусу для нескольких моментов времени (аналитическое решение)

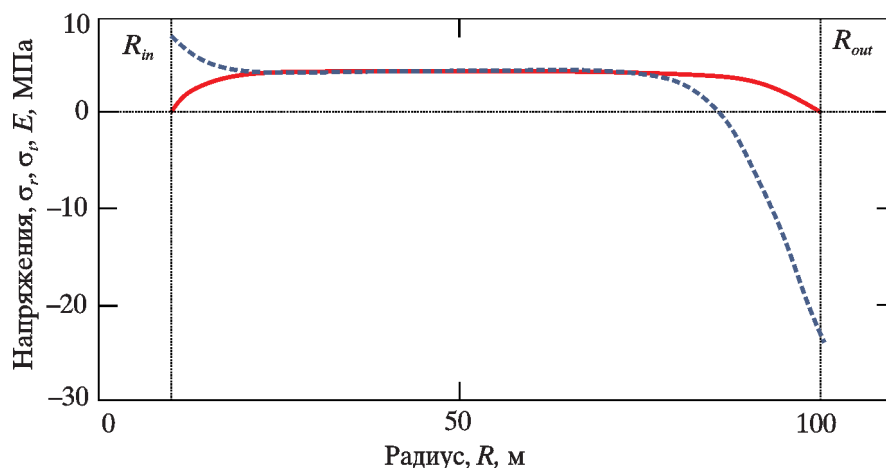


Рис. 3. Распределение радиальных (сплошная линия) и окружных (пунктирная линия) напряжений по радиусу в момент времени один год от начала нагрева

Таблица 2

Погрешности для задачи 2

Характеристика сетки, $\delta T$	Погрешности		
	$\Delta T$	$\Delta \sigma_t$	$\sigma_t / \sigma_i$
1 год от начала нагрева			
0,609	0,1318	0,2242	0,4211
0,4211	0,0775	0,1702	0,3023
0,20998	0,0130	0,1027	0,1572
0,10086	0,0023	0,0700	0,0789
20 лет от начала нагрева			
0,0851	-0,0142	0,2669	0,1573
0,0527	-0,0044	0,2047	0,0940
0,0253	-0,0011	0,1641	0,0450
0,01246	-0,00027	0,1470	0,0228

1.1.2.2. Задача 3. Шар с полостью в центре. На поверхности полости задан постоянный по времени тепловой поток, на наружной поверхности – температура

Результаты получены для тех же свойств материала, что использованы в задаче 1:  $\rho=2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $c=840$  Дж/(кг·К),  $\lambda=2,91$  Вт/(м·К),  $E=6,2 \cdot 10^4$  МПа,  $\mu=0,22$ ,  $\alpha=7,9 \cdot 10^{-6}$  1/К, радиус шара  $R=100$  м, радиус полости  $R_{in}=2$  м, тепловой поток  $q=2,91$  кВт/м<sup>2</sup>. Числовые данные о погрешностях приведены в табл. 3.

Таблица 3

Погрешности для задачи 3

Характеристика сетки, $\delta T$	Погрешности		
	$\Delta T$	$\Delta \sigma_t$	$\sigma_t / \sigma_i$
1 год от начала нагрева			
0,6145	0,1115	-0,0007	0,7614
0,4512	0,0141	0,0668	0,5749
0,2828	0,0096	0,0562	0,3544
20 лет от начала нагрева			
0,5190	0,0777	0,0014	0,7308
0,3868	0,0014	0,0553	0,5444
0,2438	0,0050	0,0482	0,3326

1.1.2.3. Задача 4. Шар с полостью в центре. На поверхности полости задан переменный по времени тепловой поток, на наружной поверхности – температура

Приведенное в работе [8] аналитическое решение может быть использовано и при переменном по времени тепловом потоке (или заданной температуре) на поверхности шара. В качестве верификационного примера рассмотрен случай, когда тепловой поток на поверхности полости экспоненциально уменьшается с течением времени:

$$q = q_0 \exp(-Bt), \tag{5}$$

где  $q_0$  и  $B$  – константы;  $t$  – время. При моделировании использовались следующие значения исходных данных:  $\rho=2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $c=840$  Дж/(кг·К),  $\lambda=2,91$  Вт/(м·К),  $E=6,2 \cdot 10^4$  МПа,  $\mu=0,22$ ,  $\alpha=7,9 \cdot 10^{-6}$  1/К, радиус шара  $R_{out}=20$  м, радиус полости:  $R_{in}=2$  м, параметры, описывающие тепловой поток на поверхности полости:  $q_0=145,5$  кВт/м<sup>2</sup>,  $B=0,101$  1/год.

Тепловые поля для нескольких моментов времени приведены на рис. 4. Температура на внутренней поверхности (поверхности полости) при выбранных параметрах растет в течение первого года, максимальный рост температуры составляет  $75^{\circ}\text{C}$ , затем температура начинает снижаться. Числовые данные о погрешностях приведены в табл. 4.

Таблица 4

Характеристика сетки, $\delta T$	Погрешности		
	$\Delta T$	$\Delta\sigma_t$	$\sigma_r/\sigma_t$
1 год от начала нагрева			
0,2346	0,0088	0,0027	0,3048
0,3681	0,0340	0,0457	0,6207
0,5492	0,0778	0,0589	0,8371

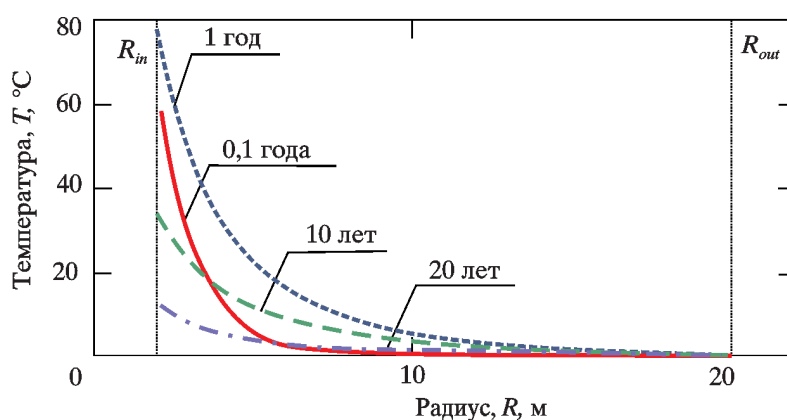


Рис. 4. Распределение температуры по радиусу для нескольких моментов времени (задача 4, аналитическое решение)

### 1.1.3. Обсуждение результатов решения задач 1–4

Результаты расчетов показаны на рис. 5–7. Как было указано выше, в качестве характеристики сетки использован относительный перепад температуры на одном элементе (где этот перепад наибольший).

На рис. 5 показана зависимость относительной погрешности численного расчета уровня максимальной температуры от принятой меры качества сетки. Для того, чтобы погрешность определения максимальной температуры не превышала 5%, перепад температур в пределах одного

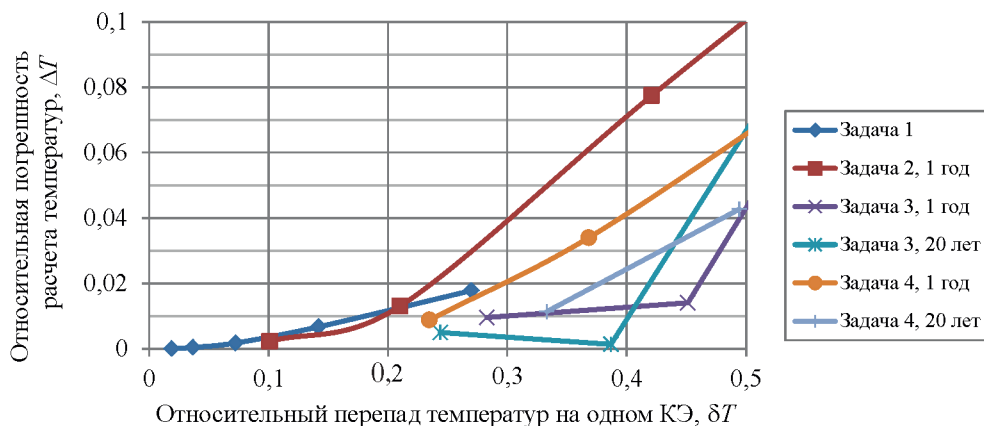


Рис. 5. Погрешность определения максимальной температуры в зависимости от перепада температур на одном конечном элементе

КЭ не должен превышать 30%. Проверка этого критерия возможна, строго говоря, только после расчета (если требование не удовлетворяется, то расчет должен быть повторен с измельчением сетки КЭ), но предварительные оценки размера элемента могут быть легко получены: при известном тепловом потоке  $q$  (например, при заданном в качестве граничного условия тепловом потоке через поверхность детали) и теплопроводности материала  $\lambda$  перепад температуры на длине стороны элемента  $l_e$  составит  $ql/\lambda$ , и при известной (хотя бы грубой) оценке максимальной температуры  $T_{max}$  оценка для размера элемента имеет вид

$$l_e \leq k_t T_{max} \frac{\lambda}{q}, \tag{6}$$

где  $k_t$  – выбранный уровень требований к перепаду температуры в пределах одного элемента (например,  $k_t=0,05$ ).

Приведенные на рис. 5–7 результаты получены при использовании так называемых «полноинтегрируемых» элементов-гексаэдров, интегрирование по объему которых производится с использованием 8-точечной ( $2 \times 2 \times 2$ ) гауссовой квадратуры (или 4-точечной  $2 \times 2$  – для плоского элемента). При использовании элементов с сокращенным порядком интегрирования (1-точечная схема) погрешность возрастает в 1–2,5 раза (большее значение отвечает случаю с большими градиентами температур). Таким образом, для обеспечения, например, 5%-ной точности определения уровня максимальной температуры следует требовать, чтобы перепад температур по

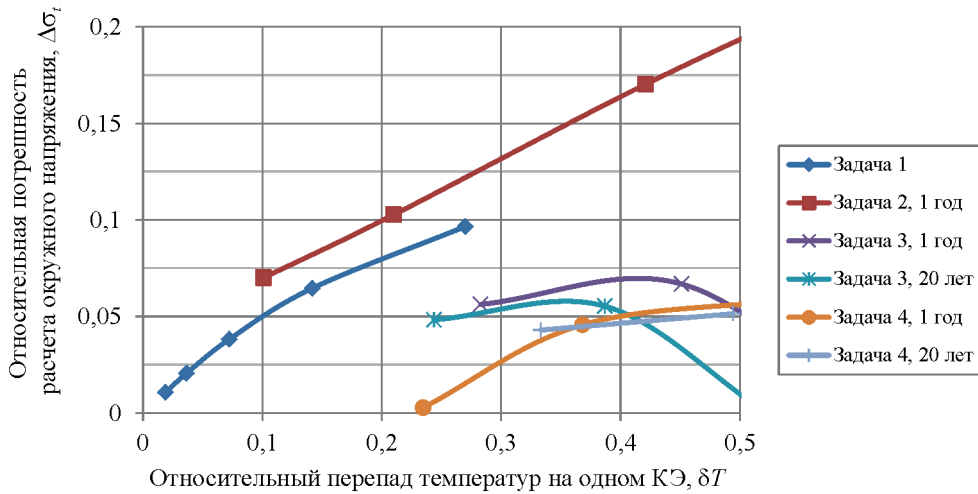


Рис. 6. Погрешность определения напряжения (параллельного поверхности) в зависимости от перепада температур на одном конечном элементе

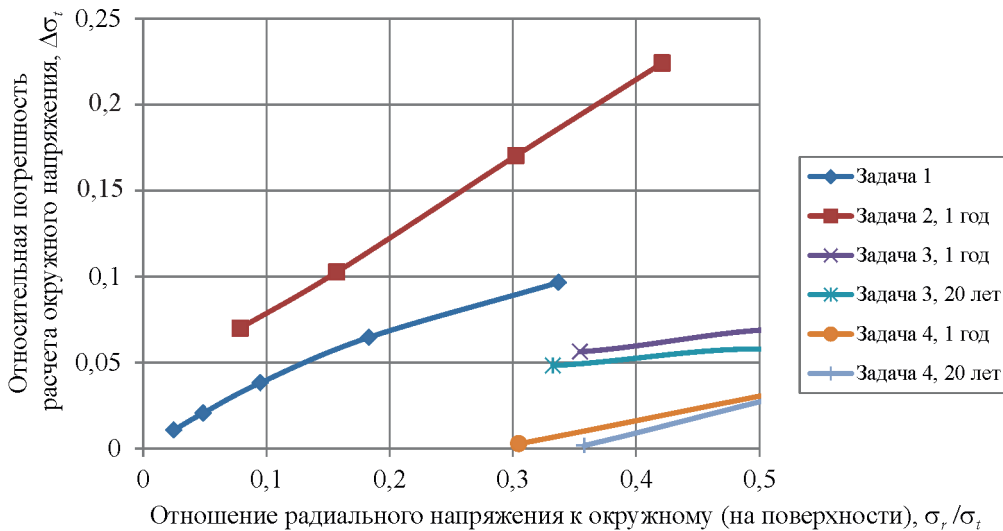


Рис. 7. Погрешность определения напряжения параллельного поверхности и напряжения нормального к поверхности

элементу не превышал 20%, в том числе (скорее, прежде всего) в зонах больших градиентов температур, т. е. около поверхностей конструкции, поверхностей раздела разных материалов.

Погрешность расчета напряжений (см. рис. 6) выше, чем погрешность расчета температур, и для обеспечения точности расчета напряжений требования к сетке следует ужесточить: 5% точности по напряжениям обеспечиваются при перепаде температур на одном элементе не более 5%.

Погрешности в определении напряжений при отсутствии аналитического решения (неоднородные материалы, сложная геометрия и т. д.) могут быть оценены, например, по величине нормального напряжения, перпендикулярного свободной поверхности (в рассмотренных выше примерах – поверхности полости). Очевидно, что на свободной поверхности нормальное напряжение  $\sigma_r$  должно быть равно 0, но численная процедура МКЭ (включая и постпроцессорную обработку, осуществляющую экстраполяцию напряжений в узлы сетки из точек интегрирования) вычисляет ненулевые значения напряжений. Из рис. 7 видно, что отношение вычисленных МКЭ значений  $\sigma_r/\sigma_t$  по величине близко к погрешности вычисления окружного (т. е. параллельного поверхности) напряжения  $\sigma_t$ , поэтому отличие величины  $\sigma_r/\sigma_t$  в лежащем на поверхности конструкции конечном элементе от ее точного (нулевого) значения может быть принято в качестве оценки погрешности вычисления напряжения  $\sigma_t$ .

## 1.2. Центально-симметричный источник в неограниченном однородном пространстве при мгновенном и распределенном во времени выделении тепла

### 1.2.1. Задача 5. Точечный, сферический и шаровой источники тепла

Принимая во внимание пространственно-временные границы предполагаемой расчетной области ПГЗРО и массива окружающей породы, можно допустить к рассмотрению вариант решения задачи в неограниченном пространстве.

Рассматривается три варианта источника тепла: точечный источник, сферическая поверхность и набор концентрических сферических поверхностей, моделирующих шар (рис. 8).

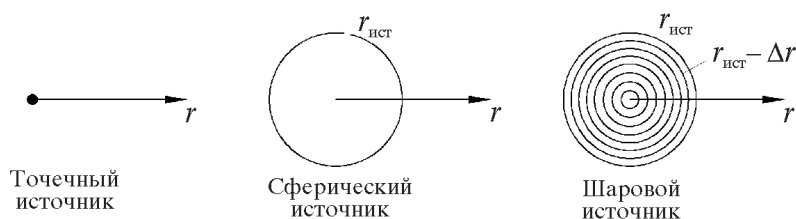


Рис. 8. Схемы вариантов источника тепла

Для неограниченного однородного пространства из работы [9] известны зависимости распределения температуры  $T(r, t)$  при мгновенном выделении источником энергии  $Q$  [Дж].

Для точечного источника

$$T(r, t) = \frac{Q}{\rho c (4\pi a t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4at}}, \quad a = \frac{\lambda}{\rho c}. \quad (7)$$

Для сферического источника

$$T(r, t) = \frac{Q}{\rho c 8\pi r r_{ист} (\pi a t)^{1/2}} \left( e^{-\frac{(r-r_{ист})^2}{4at}} - e^{-\frac{(r+r_{ист})^2}{4at}} \right). \quad (8)$$

Шаровой источник моделируется набором из  $n$  сфер, радиус наибольшей из которых –  $r_{\text{ист}}$ , радиусы остальных сфер уменьшаются по закону  $r_j = r_{\text{ист}} - (j-1)\Delta r$ , где  $j$  – номер сферы от периферии;  $\Delta r = r_{\text{ист}}/n$ . Тепловыделение  $j$ -ой сферы пропорционально площади ее сферической поверхности:  $Q_j = Q \cdot S_j / S_{\Sigma}$ , где  $S_j$  – площадь поверхности  $j$ -й сферы;  $S_{\Sigma}$  – суммарная площадь поверхностей всех сфер. Зависимость распределения температуры для шарового источника

$$T(r,t) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{\rho c 8\pi r r_j (\pi a t)^{1/2}} \left( e^{-\frac{(r-r_j)^2}{4at}} - e^{-\frac{(r+r_j)^2}{4at}} \right). \quad (9)$$

В случае существования закона изменения мощности источника  $\dot{Q}(t)$  температурное поле находится с помощью интегрирования по времени решения для мгновенного тепловыделения.

Для точечного источника

$$T(r,t) = \int_0^t \frac{\dot{Q}(\theta)}{\rho c (4\pi a (t-\theta))^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4a(t-\theta)}} d\theta, \quad (10)$$

где  $\theta$  – разность времен между моментом наблюдения и моментом тепловыделения.

Для сферического источника

$$T(r,t) = \int_0^t \frac{\dot{Q}(\theta)}{\rho c 8\pi r r_{\text{ист}} (\pi a (t-\theta))^{1/2}} \left( e^{-\frac{(r-r_{\text{ист}})^2}{4a(t-\theta)}} - e^{-\frac{(r+r_{\text{ист}})^2}{4a(t-\theta)}} \right) d\theta. \quad (11)$$

Для шарового источника

$$T(r,t) = \int_0^t \sum_{j=1}^n \frac{\dot{Q}(\theta)}{\rho c 8\pi r r_j (\pi a (t-\theta))^{1/2}} \left( e^{-\frac{(r-r_j)^2}{4a(t-\theta)}} - e^{-\frac{(r+r_j)^2}{4a(t-\theta)}} \right) d\theta. \quad (12)$$

Выражения (10)–(12) представляют собой решения задачи о разогреве неограниченного однородного пространства точечным, сферическим или шаровым источником тепла переменной мощности.

Шаровая модель источника представляется наиболее приближенной к реальному источнику за счет равномерного выделения тепла во всём объеме. Сферический и точечный источники проще в вычислительном смысле. Ниже приведены результаты расчетов для точечного, сферического и шарового источника. Свойства материала использованы те же, что и в задачах 1–4:  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 840$  Дж/(кг·К),  $\lambda = 2,91$  Вт/(м·К). Начальная температура среды  $T_0 = 9^\circ\text{C}$ . В качестве радиуса сферического и шарового источника принимается радиус  $r_{\text{ист}} = 0,3$  м остеклованного РАО.

Рассматривается два варианта тепловыделения. В одном варианте тепло уменьшается по экспоненциальному закону (5) ( $q_0 = 591,3$  Вт;  $B = 1/t_0$ ;  $t_0 = 40$  лет). Во втором происходит мгновенное выделение энергии равной суммарному количеству теплоты, выделившемуся за время  $t_0$ :

$$Q = \int_0^{t_0} \dot{Q}(t) dt = 4,7 \cdot 10^{11} \text{ Дж.}$$

На рис. 9 приведены зависимости температуры от расстояния до центра источника в различные моменты времени для мгновенного тепловыделения. На рис. 10 приведены аналогичные результаты для тепловыделения по экспоненциальному закону (5). На рис. 11, 12 приведены отличия результатов вычислений с использованием точечной и сферической моделей относительно результатов шаровой модели источника.

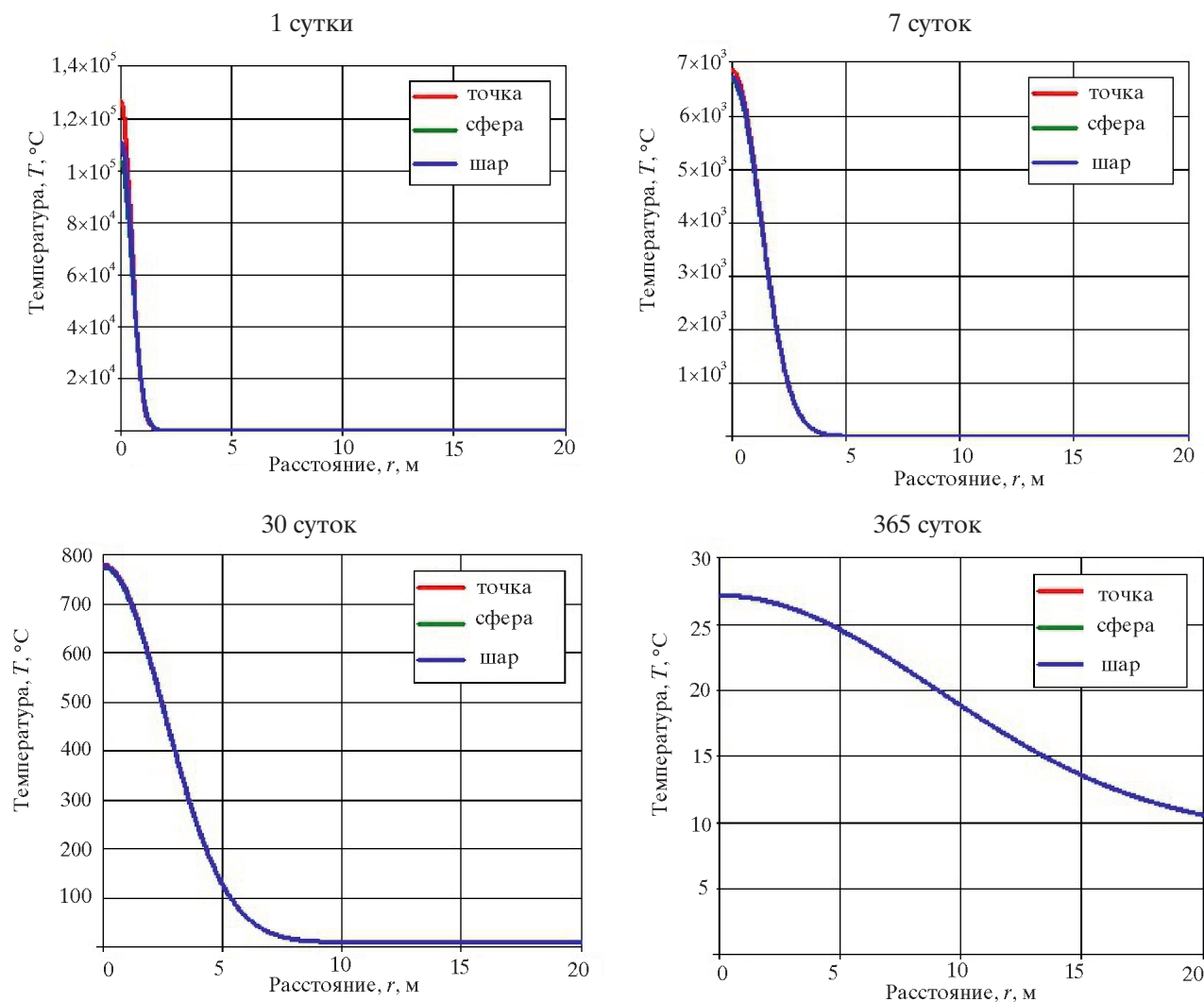


Рис. 9. Результаты расчетов поля температур при мгновенном выделении тепла:

По рис. 10–12 видно, что существенные отличия результатов между точечной, сферической и шаровой моделью наблюдаются на расстояниях, не превышающих размер источника ( $r < r_{\text{ист}}$ ). На границе источника и за ее пределами ( $r \geq r_{\text{ист}}$ ) все модели дают близкие результаты: отличие результатов точечной и сферической модели относительно шаровой для мгновенного тепловыделения не превышает 4% через 7 суток после начала тепловыделения и 1% через 30 суток; для варианта тепловыделения по экспоненциальному закону (5) отличие результатов на порядок меньше: через 7 суток не превышает 0,4%.

Анализ результатов расчетов показал, что для однородной среды, в случае выделения тепла по закону (5), поле температур на расстоянии  $r_{\text{ист}} = 0,3$  м и дальше (за пределами источника) практически не зависит от распределения тепловыделения внутри источника, то есть вполне допустимо использовать точечную модель источника, как наиболее простую.

Реальные условия работы источника отличаются от рассмотренных моделей геометрий, неоднородностью теплофизических свойств, наличием тепловых контактов. Оценить влияние данных отличий на результат можно только с помощью численных методов.

На рис. 13 приведены результаты расчетов полей температур с использованием точечной модели источника для двух вариантов выделения тепла: при постоянном тепловыделении  $q_0 = 591,3$  Вт, соответствующем начальному в формуле (5), и при экспоненциальном законе уменьшения тепловыделения согласно (5).

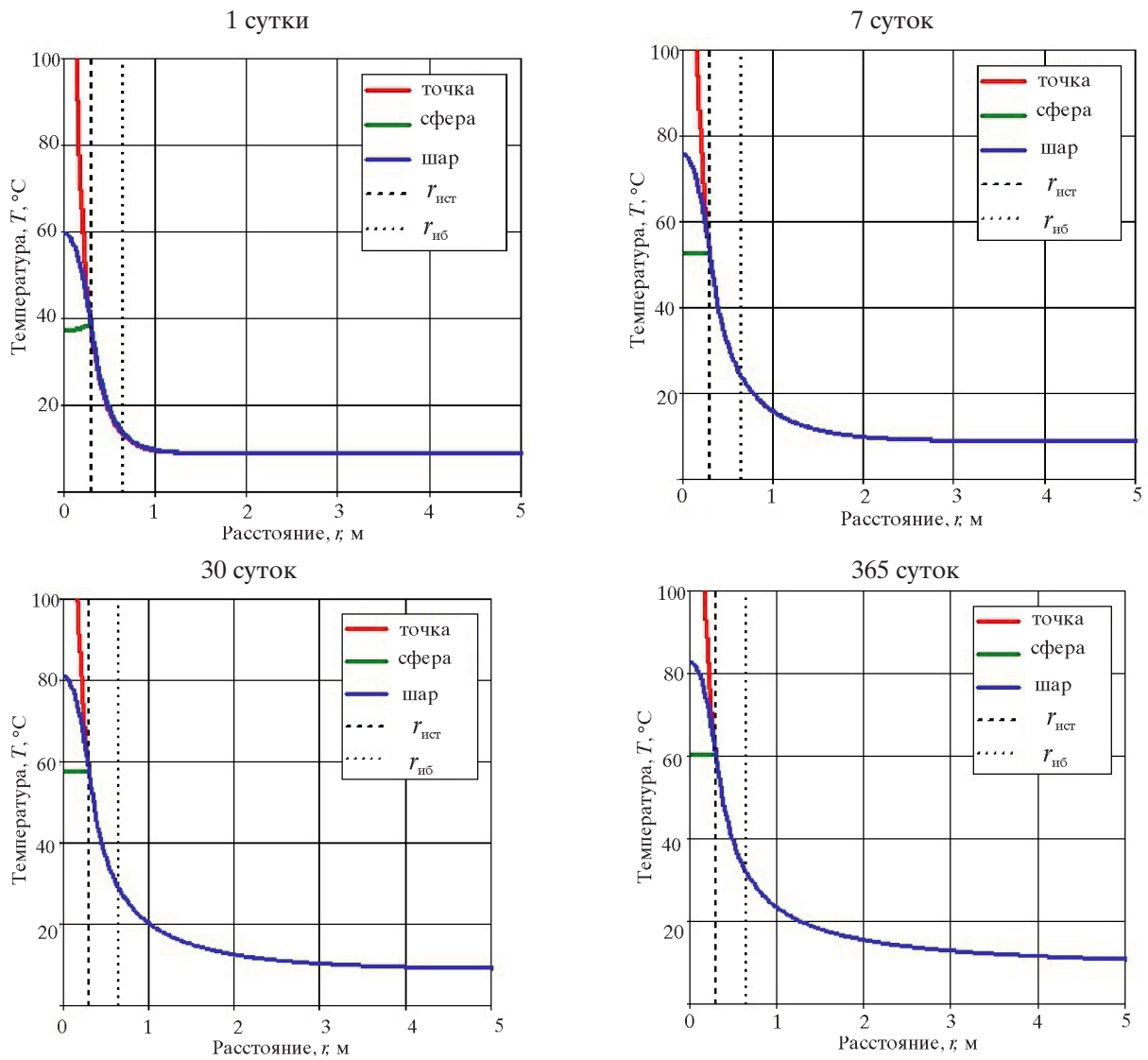


Рис. 10. Результаты расчетов поля температур при экспоненциальном законе уменьшения мощности источника тепла:  
 $r_{ист} = 0,3$  м – расстояние, соответствующее радиусу источника;  
 $r_{иб} = 0,65$  м – расстояние, соответствующее радиусу инженерных барьеров

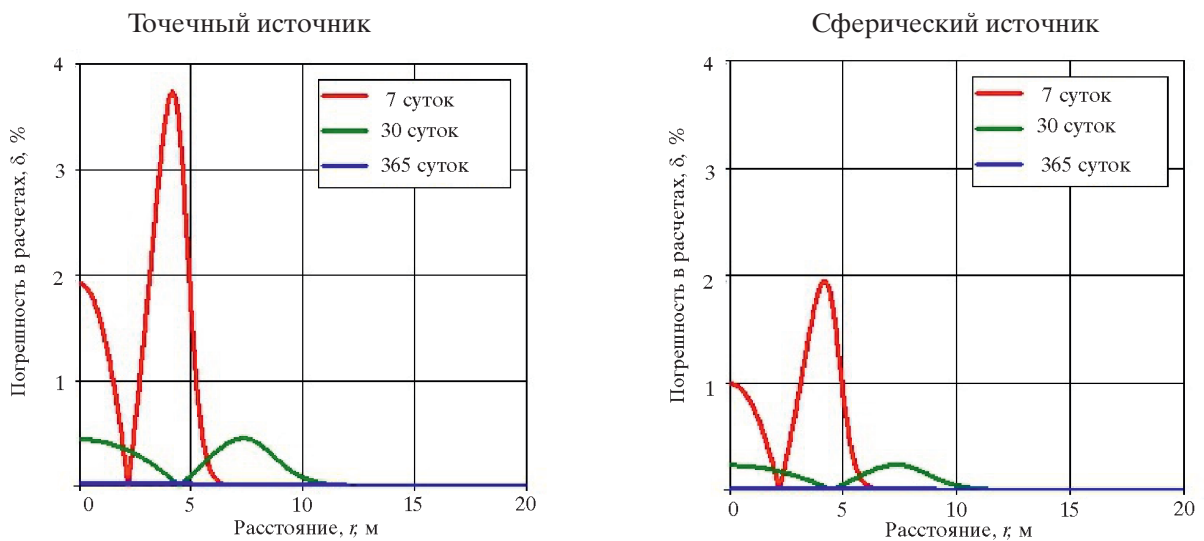


Рис. 11. Отличия результатов расчетов для точечного и сферического источников относительно шарового при мгновенном выделении тепла



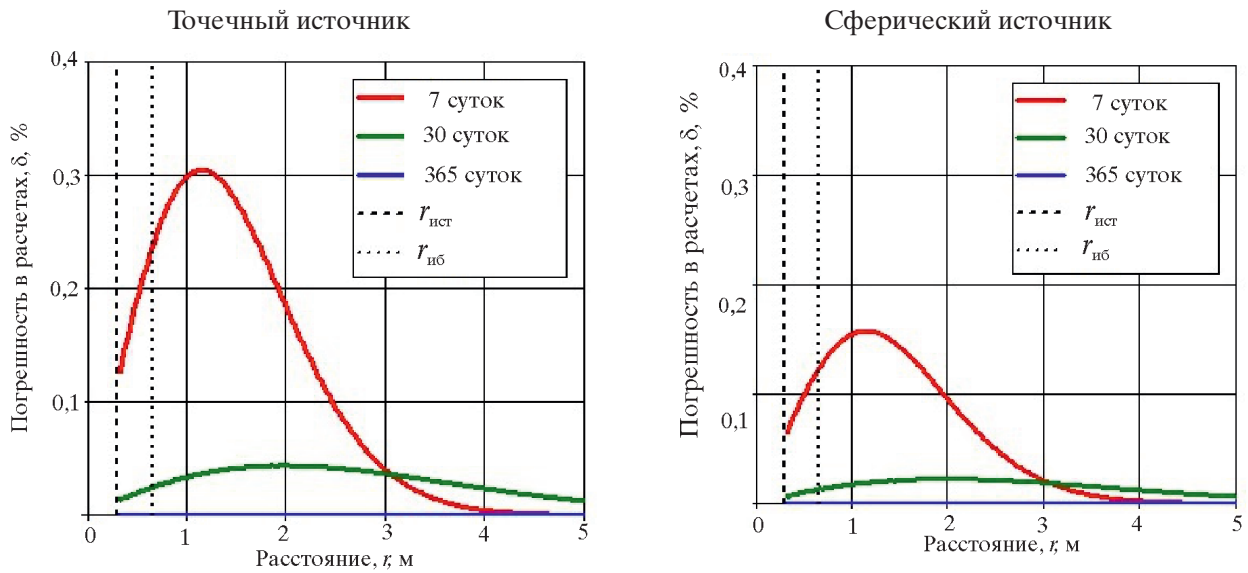


Рис. 12. Отличия результатов расчетов для точечного и сферического источников относительно шарового при экспоненциальном законе уменьшения тепла. Зависимости построены в диапазоне  $r = 0,3 \div 20$  м:

$r_{\text{ист}} = 0,3$  м – расстояние, соответствующее радиусу источника;  
 $r_{\text{иб}} = 0,65$  м – расстояние, соответствующее радиусу инженерных барьеров

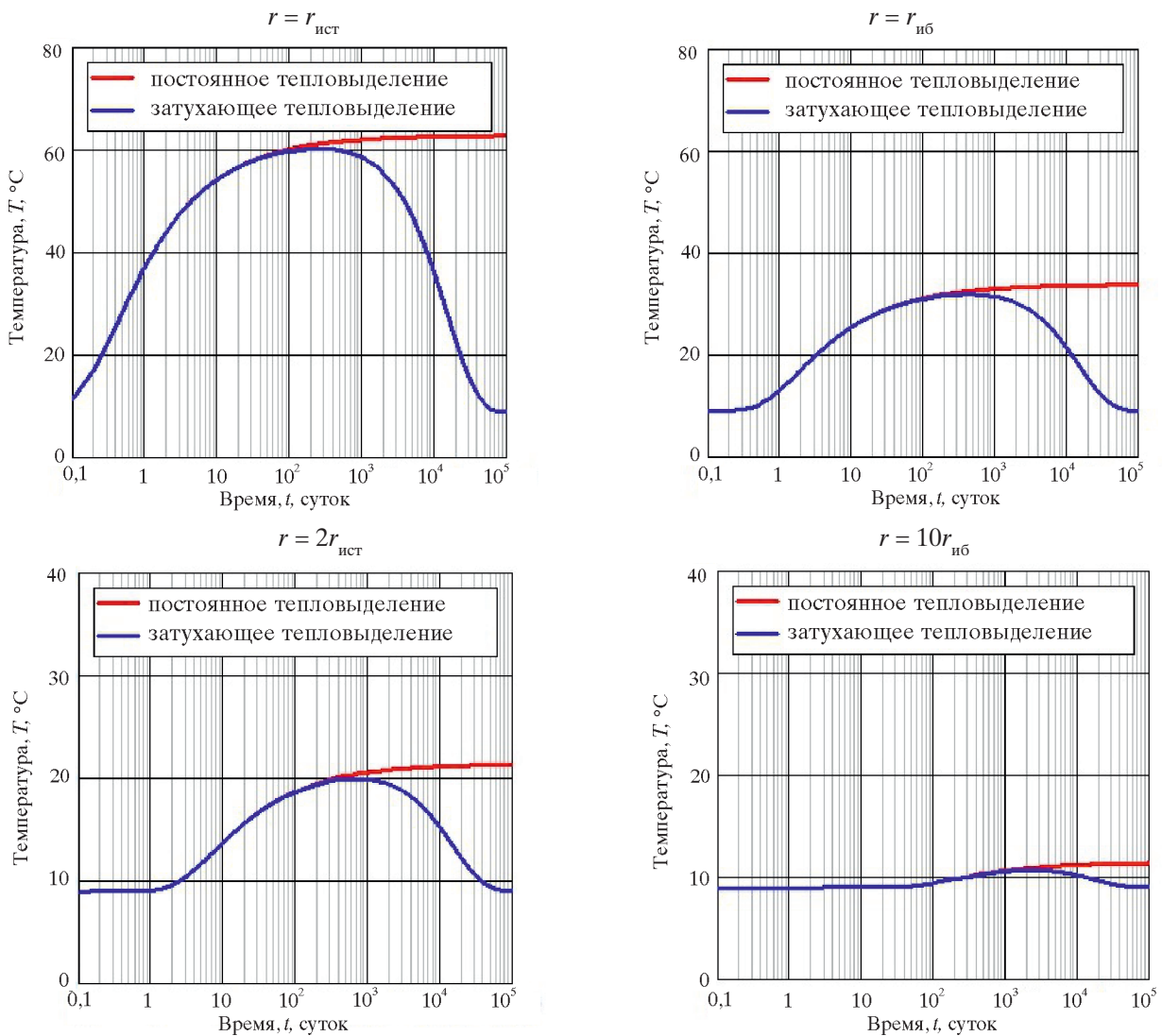


Рис. 13. Сравнение результатов расчетов при постоянном и экспоненциальном законе тепловыделения:

$r_{\text{ист}} = 0,3$  м – расстояние, соответствующее радиусу источника;  
 $r_{\text{иб}} = 0,65$  м – расстояние, соответствующее радиусу инженерных барьеров

Разница между постоянным тепловыделением и экспоненциальным законом уменьшения тепловыделения начинает проявляться спустя 100 дней на границе источника и через 1000 дней на удалении 6,5 м ( $10r_{нб}$ ) от центра источника. На рассмотренных расстояниях от центра источника отличие максимальной температуры при экспоненциальном законе уменьшения тепловыделения от величины, к которой асимптотически стремится температура при постоянном тепловыделении, не превышает 7%.

Проведенное сопоставление показало, что источник тепла с постоянным тепловыделением для оценок теплового состояния ПГЗРО использовать не желательно.

1.2.2. Задача 6. Точечный источник с изменением мощности тепловыделения

Проводится решение тестовой задачи о точечном источнике тепла, рассмотренной в статье [3] ИБРАЭ РАН. Исходные данные и свойства материала использованы те же, что и в статье [3], и в задачах 1–4:  $\rho=2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $c=840$  Дж/(кг·К),  $\lambda=2,91$  Вт/(м·К); закон изменения тепловыделения точечного источника  $\dot{Q}(t)=Q_0 \cdot e^{-t/t_0}$ , где  $Q_0=591,3$  Вт,  $t_0=40$  лет. При решении задачи МКЭ точечный источник считался расположенным в сфере радиусом 10 м, первоначальная температура материала и на границе сферы задавалась равной 9°C. На рис. 14 приведены результаты аналитических и численных решений, полученных в РФЯЦ – ВНИИТФ и ИБРАЭ РАН.

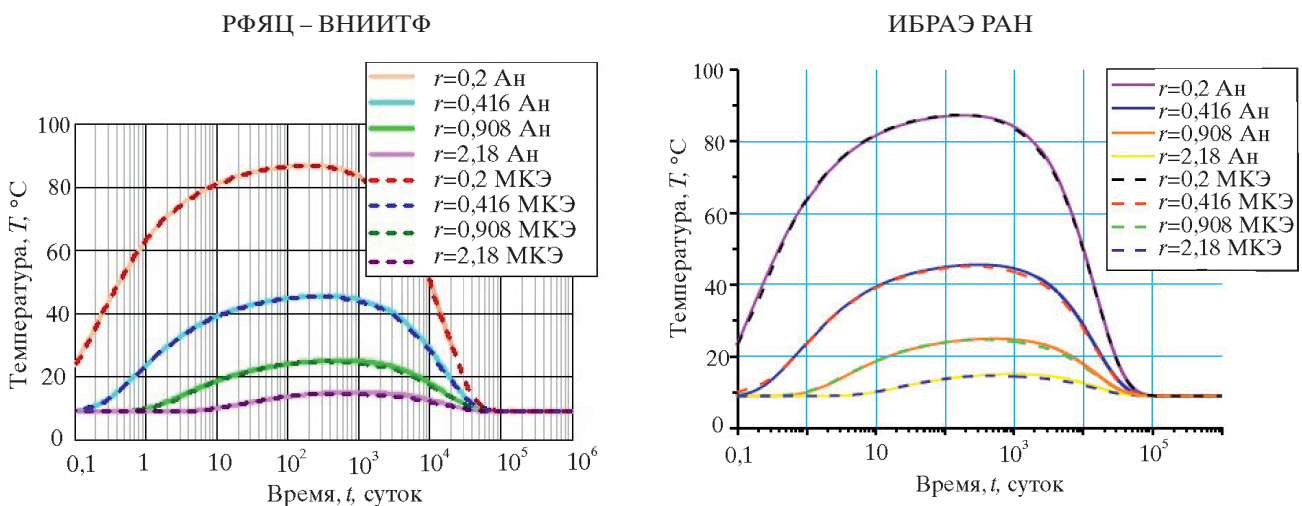


Рис. 14. Зависимости температуры от времени на расстоянии  $r$  от источника тепла:  
 $r$  – расстояние от источника тепла, [м]; Ан – аналитическое решение;  
 МКЭ – решение задачи методом конечных элементов

В табл. 5 для сравнения приведены значения максимальных температур и моментов времени их достижения на расстояниях  $r$  равных 0,2; 0,416; 0,908 и 2,18 м, полученных в РФЯЦ – ВНИИТФ и ИБРАЭ РАН.

Отмечается хорошее согласование методик расчета используемых в РФЯЦ – ВНИИТФ и ИБРАЭ РАН.

Представленная аналитическая модель может быть расширена введением уравнений для оценки напряженного состояния. В соответствии с [7, 10], при центрально-симметричном распределении температуры в однородной среде с внешней границей  $b$ , справедливы выражения для напряжений в радиальном  $\sigma_r$  и окружном  $\sigma_t$  направлениях:

$$\sigma_r(r) = \frac{2\alpha E}{1-\mu} \left( \frac{1}{b^3} \int_0^b T(r) r^2 dr - \frac{1}{r^3} \int_0^r T(r) r^2 dr \right); \tag{13}$$

$$\sigma_t(r) = \frac{\alpha E}{1-\mu} \left( \frac{2}{b^3} \int_0^b T(r) r^2 dr + \frac{1}{r^3} \int_0^r T(r) r^2 dr - T(r) \right). \quad (14)$$

В табл. 5 и на рис. 15 приведено сравнение результатов аналитического и численного решений для точечного источника напряжений в радиальном  $\sigma_r$  и окружном  $\sigma_\theta$  направлениях.

Таблица 5

Сравнение аналитических и численных решений,  
полученных РФЯЦ ВНИИТФ и ИБРАЭ РАН

Расстояние от источника		$r = 0,2$ м		$r = 0,416$ м		$r = 0,908$ м		$r = 2,18$ м	
Величины, по которым проводится сравнение		$T_{max}, ^\circ\text{C}$	$t$ , суток	$T_{max}, ^\circ\text{C}$	$t$ , суток	$T_{max}, ^\circ\text{C}$	$t$ , суток	$T_{max}, ^\circ\text{C}$	$t$ , суток
ИБРАЭ РАН	Ан	87,2	190	45,4	300	24,8	500	14,9	950
	МКЭ	87,2	190	45,3	265	24,7	400	14,7	450
РФЯЦ – ВНИИТФ	Ан	86,9	190	45,6	300	25,1	550	15,2	950
	МКЭ	86,9	190	45,5	264	24,8	352	14,6	400
Отличие, %	Ан	0,3	0,0	0,4	0,0	1,2	10,0	2,0	0,0
	МКЭ	0,3	0,0	0,4	0,4	0,4	12,0	0,7	11,1

Примечание: Ан – аналитическое решение; МКЭ – решение задачи методом конечных элементов. Данные ИБРАЭ РАН получены оцифровкой рисунка из работы [3], где максимальные значения кривых не явно выражены.

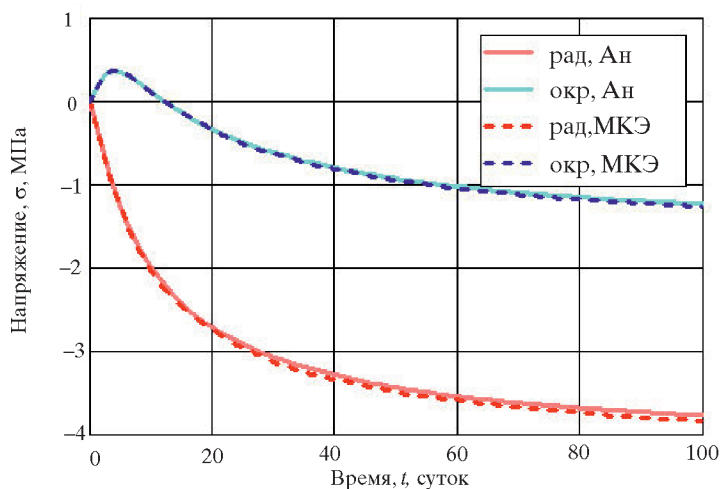


Рис. 15. Зависимости радиальных и окружных напряжений на удалении 2 м от точечного источника тепла:

Ан – аналитическое решение; МКЭ – решение задачи методом конечных элементов

Аналитическая модель, в силу сравнительно небольших вычислительных потребностей, может быть использована для проведения экспресс-оценок полей температур и НС в однородной среде, например при выполнении оптимизационных расчетов.

Проведем оценку влияния размера конечных элементов на точность определения температуры.

На рис. 16 приведены результаты численных решений рассмотренной выше тестовой задачи из статьи [3]. Решения получены при использовании конечных элементов, размер  $l_e$  которых в радиальном направлении составлял 0,01; 0,1 и 1,0 м.

Вблизи источника тепла получаемое решение в большей степени зависит от размера конечного элемента, чем на удалении. На расстоянии  $r=0,2$  м от источника тепла решение практически совпадает с аналитическим при размере элемента  $l_e=0,01$  м. На расстоянии  $r=2,18$  м – при размере элемента  $l_e=1$  м.

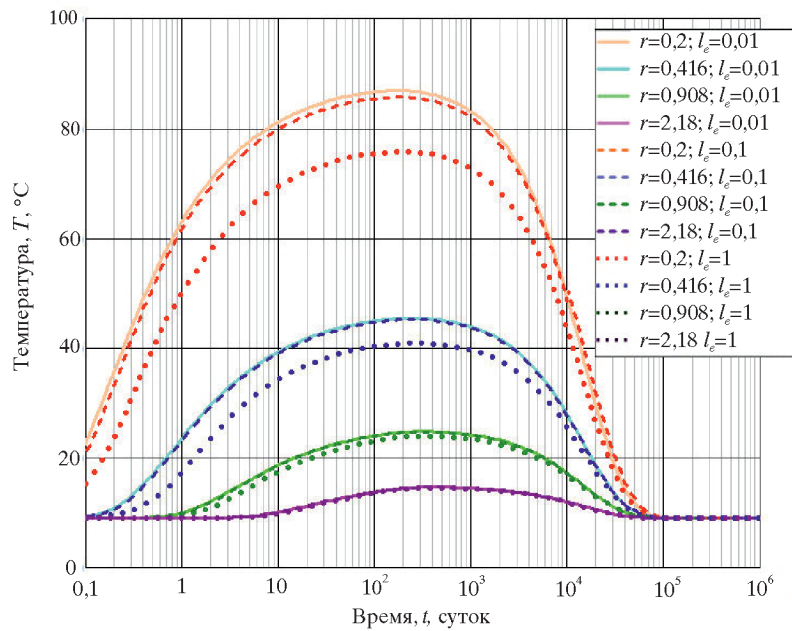


Рис. 16. Зависимости температуры от времени на расстоянии  $r$  [м]

Проведенное исследование относится только к рассмотренной задаче, и распространить его на модель ПГЗРО напрямую нельзя. Однако можно отметить, что при использовании крупной сетки потеря точности вблизи источника не влечет за собой ухудшение точности решения на удалении от источника.

### 1.3. Задача 7. Распределение температуры в ПГЗРО от источников тепла в виде стержней (использование принципа суперпозиции для конечного набора точечных источников)

Использование принципа суперпозиции для конечного набора точечных источников позволяет провести расчет распределения температуры в ПГЗРО и его окрестности. Рассматриваются точечные источники, моделирующие изолирующие контейнеры, расположенные на первом участке (РАО, накопленные до 2010 года) и втором участках (РАО, накопленные после 2010 года). В расчетах учитывался порядок заполнения скважин захоронения, принятый в работе [3]. Исходные данные и свойства материала задавались те же, что и в задаче 1–4 и в работе [3]. Расчетная область массива в МКЭ включает в себя четверть ПГЗРО и массива окружающих пород и имеет размер  $1500 \times 550 \times 550$  м. Проведем сравнение результатов расчетов температур вдоль горизонтальной оси симметрии ПГЗРО (рис. 1), проходящей на первом участке между скважинами захоронения, на втором участке – по скважинам. На рис. 17 и 18 приведены результаты аналитического расчета, полученные в РФЯЦ – ВНИИТФ, результаты с использованием МКЭ полученные в ИБРАЭ РАН [3] (модель включает в себя четверть ПГЗРО и массива окружающих пород и имеет размер  $1500 \times 550 \times 550$  м). Сравнение результатов расчетов приводится в табл. 8.

Скачки температур, видимые на графиках, связаны с тем, что рассматриваемая ось на втором участке ( $x$  – от 710 до 1065 м) проходит непосредственно через скважины захоронения, а на первом участке ( $x$  – от 400 до 710 м) – между скважинами.

По рис. 17 и 18 и из табл. 8 видно качественное и количественное соответствие результатов. Количественные расхождения наблюдаются вблизи источников тепла во время интенсивного тепловыделения, что, по-видимому, объясняется различием в дискретизации источников: в первом случае источники тепла дискретные точечные, во втором – распределенные вдоль скважины.

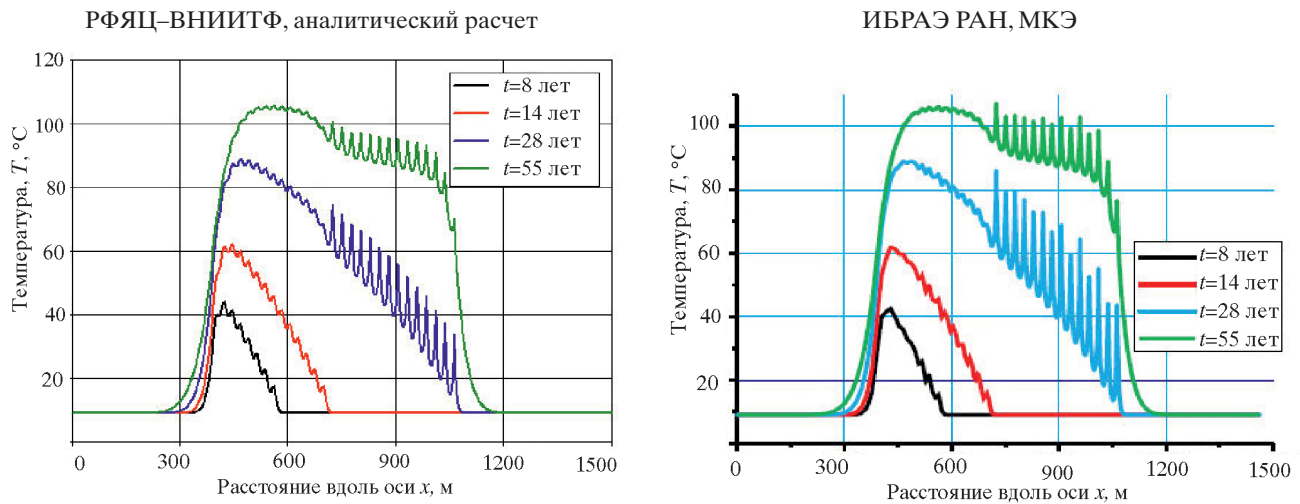


Рис. 17. Зависимости температуры вдоль горизонтальной оси симметрии ПГЗРО до 55 лет

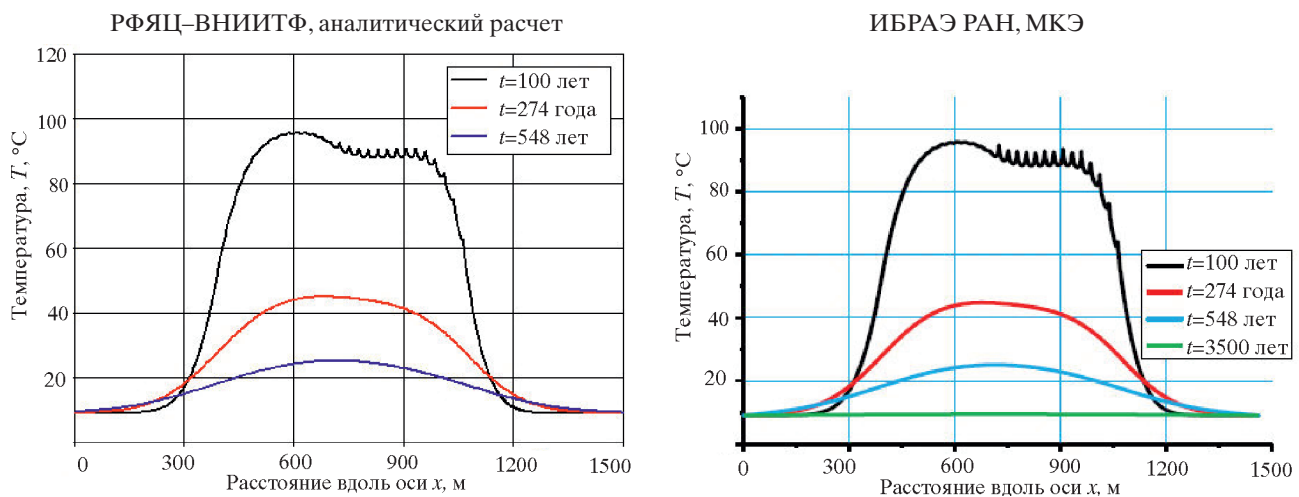


Рис. 18. Зависимости температуры вдоль горизонтальной оси симметрии ПГЗРО до 3500 лет

Используя принцип суперпозиции для конечного набора точечных источников, аналитическим решением покажем влияние плотности захоронения РАО на достигаемую максимальную температуру в ПГЗРО. На рис. 19, 20 приведены результаты расчета температур для исходной геометрии модели ПГЗРО [3] и для вариантов с увеличенными на 10% интервалами между камерами и скважинами. Увеличение расстояния между скважинами на 10% в одном направлении ведет к снижению максимальной температуры ПГЗРО примерно на 10%, в двух направлениях – на 20%, то есть прослеживается линейная зависимость от плотности упаковки контейнеров.

На рис. 21 приведены результаты расчетов температур для исходной геометрии ПГЗРО [3] вдоль горизонтальной оси симметрии ПГЗРО в момент времени 55 лет для двух вариантов тепловыделения РАО:  $1 \text{ кВт/м}^3$  – на первом участке;  $1,5 \text{ кВт/м}^3$  – на втором участке (в соответствии с данными работы [3]);  $1 \text{ кВт/м}^3$  – на первом участке; на втором участке по нормативам [6] РАО может иметь удельную мощность тепловыделения до  $2,0 \text{ кВт/м}^3$ .

Увеличение мощности тепловыделения на втором участке ПГЗРО приводит к смещению максимальных температур в зону второго участка и увеличению максимальной температуры вмещающего массива с  $110$  до  $130^\circ\text{C}$ , что превышает температуру закипания воды.

Проведенные оценки показали, что на тепловое состояние вмещающих пород ПГЗРО существенное влияние оказывает пространственное распределение источников тепла и их мощность.

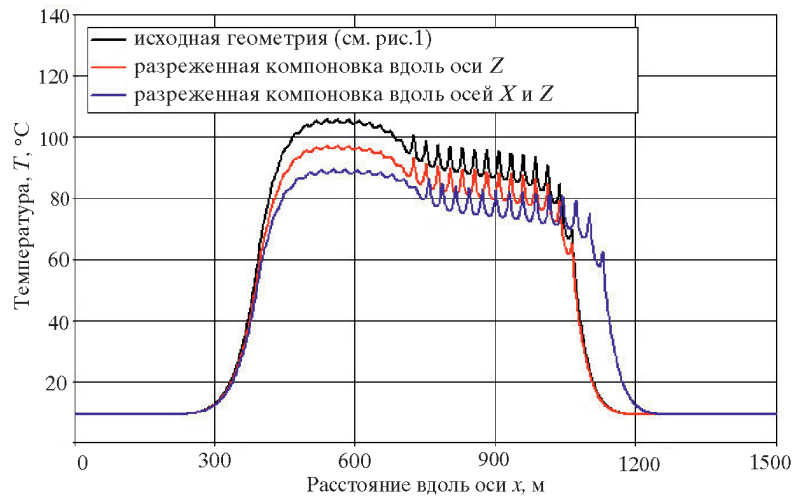


Рис. 19. Распределение температуры вдоль горизонтальной оси симметрии ПГЗРО (ось  $X$ ) в момент времени 55 лет (ось  $Z$  направлена перпендикулярно плоскости симметрии ПГЗРО)

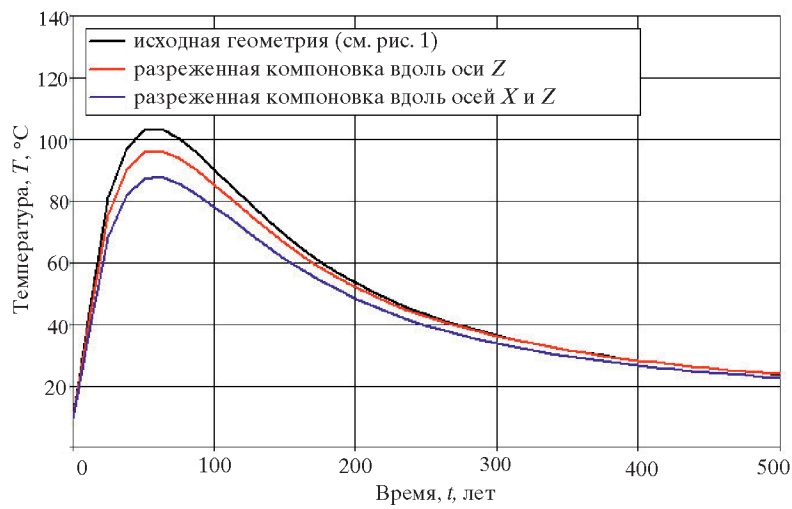


Рис. 20. Зависимости температуры от времени в центре 8-й камеры (ось  $X$  направлена вдоль оси симметрии ПГЗРО; ось  $Z$  – перпендикулярно плоскости симметрии ПГЗРО)

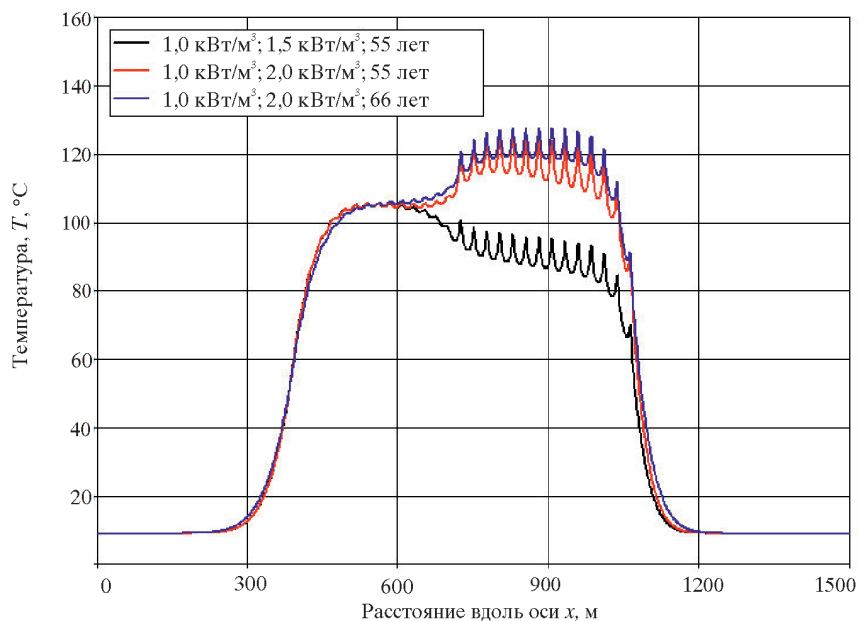


Рис. 21. Зависимости температуры вдоль горизонтальной оси симметрии ПГЗРО

#### 1.4. Выводы по верификации тепловых (термоупругих) расчетов

1. Аналитические решения для задач о тепловом поле шара при произвольных (переменных по времени) граничных условиях на наружной и внутренней поверхности для точечного источника энергии в неограниченном однородном пространстве и оценки напряженного состояния хорошо согласуются с численными решениями (МКЭ), что обеспечивает определенную уверенность в корректности численных процедур.

2. Полученные в аналитических решениях отличия теплового состояния неограниченного однородного пространства для трех вариантов источника тепла (точечный источник, сферическая поверхность и набор концентрических сферических поверхностей, моделирующих шар) и для различных вариантов тепловыделения (по закону  $\dot{Q}(t) = q_0 e^{-t/t_0}$ , постоянное во времени тепловыделение) показали, что отклонение результатов наблюдается на расстояниях, не превышающих 0,3 м (радиус распределенного источника). На внутренней границе инженерных барьеров и за ее пределами поле температур практически не зависит от принятого вида теплового источника. Вполне допустимо использовать точечную модель теплового источника, как наиболее простую, для упрощения численного моделирования теплового состояния ПГЗРО и вмещающих пород.

3. Проведенные оценки выполненных аналитических решений показали, что на тепловое состояние вмещающих пород ПГЗРО существенное влияние оказывает пространственное распределение источников тепла и их мощность.

4. В численных расчетах при использовании крупной сетки потеря точности вблизи источника тепла не влечет за собой ухудшение точности решения на удалении от него.

5. В качестве характеристики сетки КЭ представляется удобным принять не абсолютный размер элемента (в метрах), а относительный перепад температуры по элементу

$$\delta T = \max_i \frac{T_{max_i} - T_{min_i}}{T_{max_i}},$$

где  $T_{max_i}$  и  $T_{min_i}$  – максимальная и минимальная температура в конечном элементе номер  $i$ ; максимум берется по всем конечным элементам модели.

6. В выполненных верификационных примерах оказалось, что для достижения 5%-ной точности расчета абсолютных уровней температур следует использовать сетку, обеспечивающую  $\delta T < 20\%$ . Величина  $\delta T$  должна оцениваться по результатам расчета; если она превышает установленное ограничение, расчет следует повторить с измельчением сетки конечных элементов в конструкции. Предварительная оценка размера элемента  $l_e$ , обеспечивающего требуемую величину  $\delta T$ , может быть получена по формуле

$$l_e \leq \delta T \cdot T_{max} \frac{\lambda}{q},$$

где  $T_{max}$  – оценка максимальной температуры;  $\lambda$  – теплопроводность материала;  $q$  – тепловой поток (задаваемый в качестве граничного условия).

7. Для обеспечения точности расчета напряжений требование должно быть ужесточено: до  $\delta T < 5\%$  для требуемой точности определения напряжений в 5%. В качестве оценки уровня погрешности вычисления напряжений, можно использовать отношение расчетных значений радиального (перпендикулярного свободной поверхности) и окружного (параллельного этой поверхности) напряжений.

8. Аналитическая модель, основанная на точечном источнике тепла в неограниченном однородном пространстве, в силу сравнительно небольших вычислительных потребностей может

быть использована для проведения экспресс-оценок полей температур и НДС в однородной среде, например при выполнении оптимизационных расчетов.

9. Модель однородной среды, включающая в себя четверть ПГЗРО и массива окружающих пород, имеющая размер  $1500 \times 550 \times 550$  м и две плоскости симметрии, хорошо описывает температурное состояние в численном расчете МКЭ.

10. Увеличение расстояния между скважинами на 10% в одном направлении ведет к снижению максимальной температуры ПГЗРО примерно на 10%, в двух направлениях – на 20%.

11. Если на втором участке захоронения ПГЗРО РАО будут иметь удельную мощность тепловыделения  $2,0 \text{ кВт/м}^3$ , то максимальная температура ПГЗРО смещается в зону второго участка и увеличивается с 110 до  $130^\circ\text{C}$ , что в обоих случаях превышает температуру закипания воды.

12. В рамках работы не рассматриваются факторы, которые могут оказать существенное влияние на напряженное состояние в реальной задаче: ползучесть материала (на больших временных базах), рассеянное разрушение (образование сеток трещин), правомерность задания всему массиву вмещающих пород единых физико-механических свойств. Их влияние следует оценить отдельно.

## 2. Численное моделирование в связанной постановке температурных полей в ПГЗРО, в массиве окружающих пород и их упругого напряженного состояния

### 2.1. Описание расчетных моделей ПГЗРО и массива вмещающих пород

На рис. 22 показана расчетная модель ПГЗРО и массива окружающих пород. Предполагается, что массив пород является ненарушенным тектоникой гранитным блоком и ПГЗРО находится в центре блока. По аналогии с работой ИБРАЭ РАН модель включает в себя четверть ПГЗРО и массива окружающих пород, имеет две плоскости симметрии и размер  $1500 \times 550 \times 550$  м (в работе [3] размер модели  $1500 \times 550 \times 450$  м).

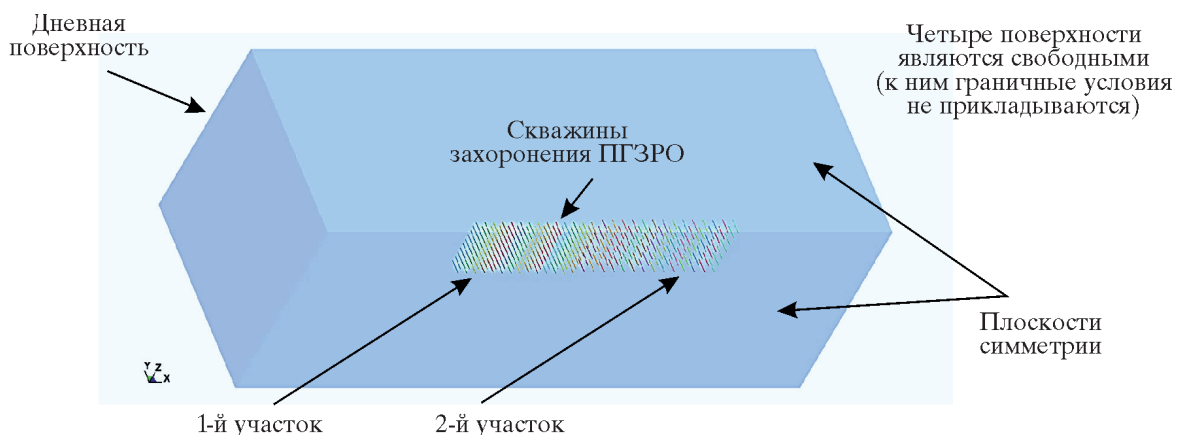


Рис. 22. Расчетная модель ПГЗРО и массива окружающих пород

Сеточное разбиение расчетной области показано на рис. 23 и 24.

При формировании расчетной области были сделаны упрощения, аналогичные расчетам ИБРАЭ РАН [3]. Так, тепловыделение было принято равномерно распределенным вдоль скважины, материалы инженерных барьеров (бентонит, шликер, бетон, стенки контейнеров и бидонов) были сгруппированы в один материал с усредненными свойствами. Все транспортно-технологические выработки и камеры захоронения считались заполненными вмещающей породой с самого начала.



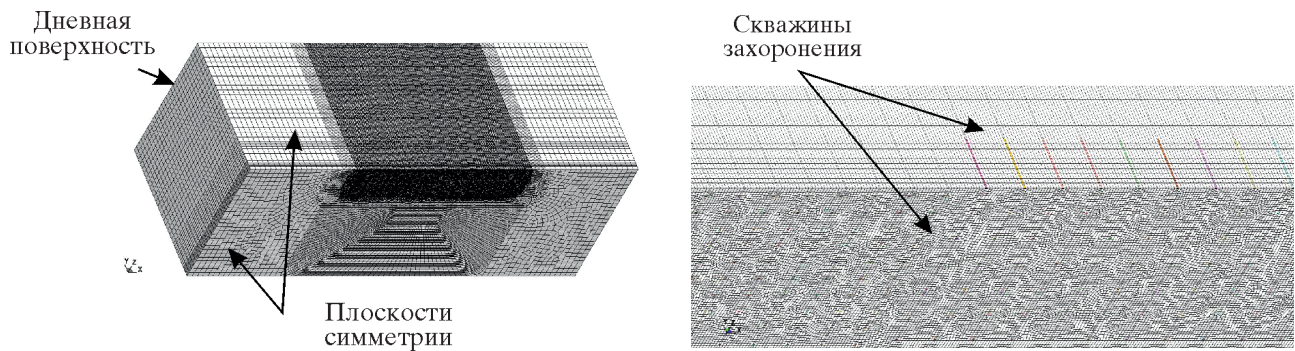


Рис. 23. Конечно-элементная сетка

Теплофизические свойства материалов, принятые в расчете, задавались такими же, как в расчетах ИБРАЭ РАН (табл. 6). Моделировалось постепенное заполнение ПГЗРО, при этом каждый год заполнялись скважины одной камеры захоронения (рис. 22). Таким образом, общее время заполнения равно 28 годам. Начальная температура во всей расчетной области принималась равной  $9^{\circ}\text{C}$ .

Предполагалось, что тепловыделение уменьшается по экспоненциальному закону (5), время, за которое начальное тепловыделение уменьшается в  $e$  раз, в расчетах принималось равным 40 годам. Значение начальной мощности для участка 1 (рис. 22) принималось равным  $1 \text{ кВт/м}^3$ , для участка 2 – равным  $1,5 \text{ кВт/м}^3$ .

Таблица 6

Теплофизические свойства материалов, принятые в расчетах

Материал	Теплопроводность, Вт/(м·К)	Теплоемкость, Дж/(кг·К)	Плотность, кг/м <sup>3</sup>
Остеклованные РАО	2,4	800	2500
Вмещающая порода	2,91	840	2700
Инженерные барьеры	8,1	1500	2800

Результаты расчетов ИБРАЭ РАН показали, что максимальная температура наблюдается в центральных скважинах 8-й камеры захоронения на первом участке. Для уточнения теплового и напряженного состояния в области данной скважины разработана конечно-элементная модель с более детальным ее описанием (рис. 24–29).

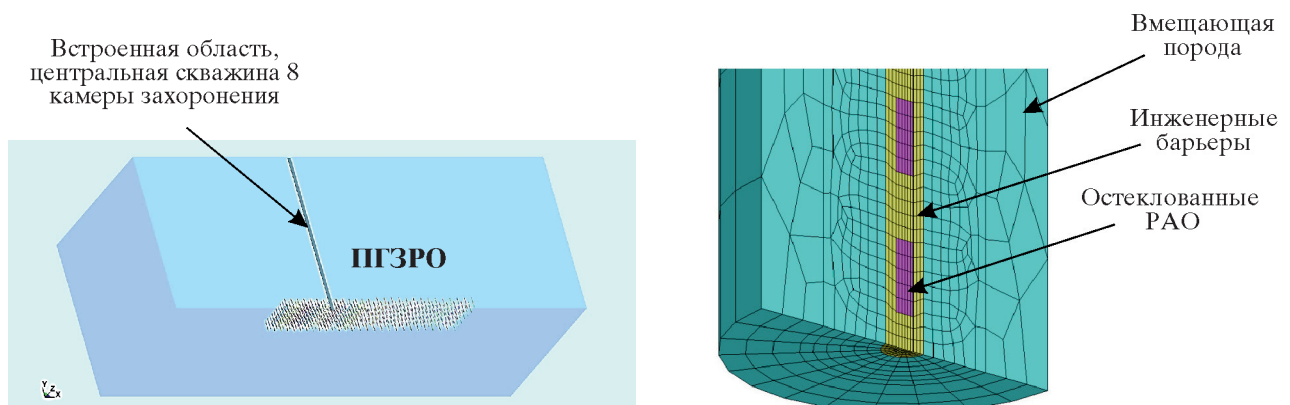


Рис. 24. Расчетная модель со встроенной областью

В табл. 7 приведены физико-механические свойства материалов, задаваемые в расчетах.

Таблица 7

Физико-механические свойства материалов, задаваемые в расчетах

Материал	Модуль упругости, $E$ , МПа	Коефф. Пуассона, $\mu$	Коефф. линейного расширения, $\alpha$ , 1/К	Предел прочности, МПа		
				на сдвиг, $\sigma_s$	на разрыв, $\sigma_p$	на сжатие, $\sigma_{сж}$
Вмещающая порода (гранит)	$6,2 \cdot 10^4$	0,22	$8 \cdot 10^{-6}$	10	8	155
Инженерные барьеры (бентонит)	940	0,2	$28 \cdot 10^{-6}$	—	0,8	7,5
Остеклованные РАО	$7 \cdot 10^4$	0,25	$0,8 \cdot 10^{-6}$	—	35	500

Расчеты проводились МКЭ в связанной постановке (тепло + прочность) с учетом собственного веса вмещающей породы массива.

### 2.2. Анализ теплового состояния ПГЗРО и массива окружающих пород

На рис. 25 показано распределение температуры по пространству захоронения и окружающей породе в отдельные моменты времени с начала заполнения ПГЗРО.

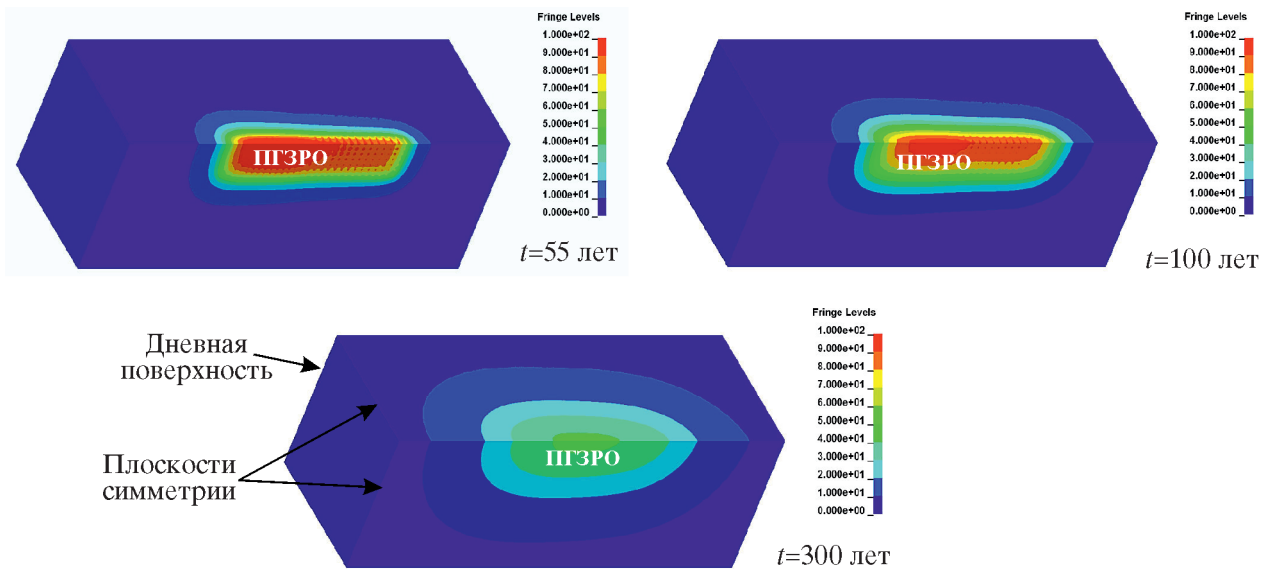
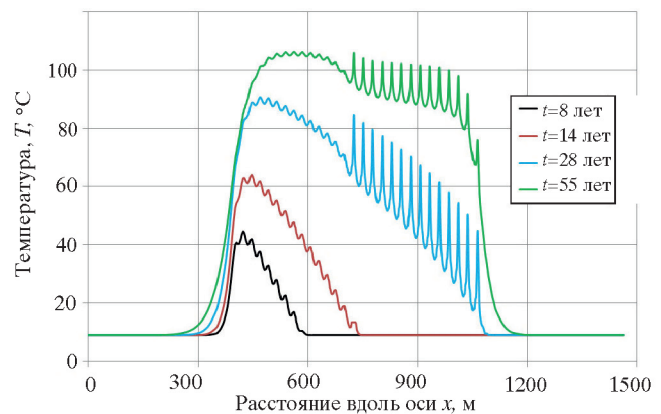
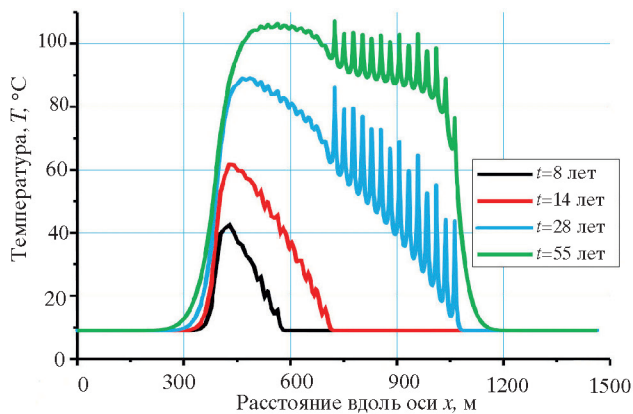


Рис. 25. Распределение температуры  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) в процессе жизненного цикла ПГЗРО

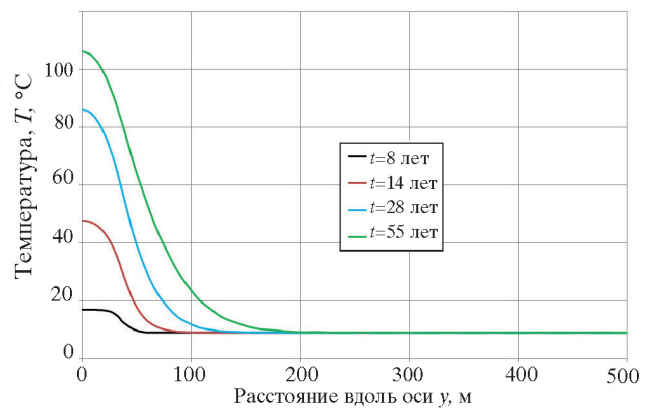
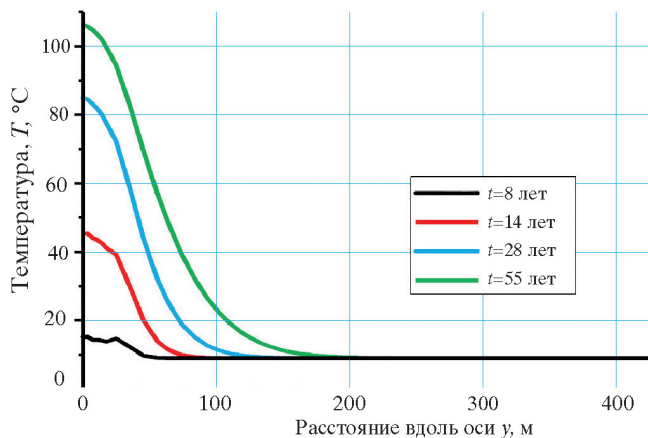
На рис. 26, 27 показано сопоставление полученных результатов расчетов (графики справа) с результатами расчетов ИБРАЭ РАН [3] (графики слева). Полученные расчетные значения теплового состояния ПГЗРО хорошо согласуются между собой.

При численном моделировании с помощью программы конечно-элементного анализа существенное влияние на точность решения может оказывать степень дискретизации сетки. Для оценки этого влияния проведем сопоставление полученных результатов численного моделирования с аналитическим решением, подробное описание которого приведено в предыдущей главе. На рис. 28 показаны графики (для численного и аналитического решения) изменения температуры в процессе распространения тепла в точках на разном удалении от скважины захоронения.

## Вдоль горизонтальной оси симметрии ПГЗРО



## Вдоль вертикальной прямой, проходящей через центр 8-й камеры захоронения участка 1



## Вдоль горизонтальной прямой, проходящей по вершинам скважин 8-й камеры захоронения участка 1

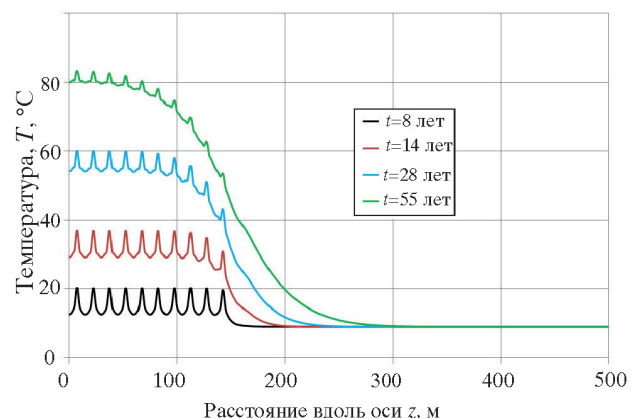
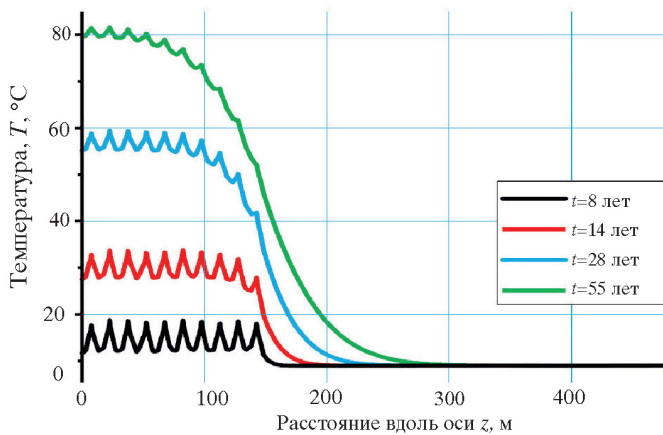
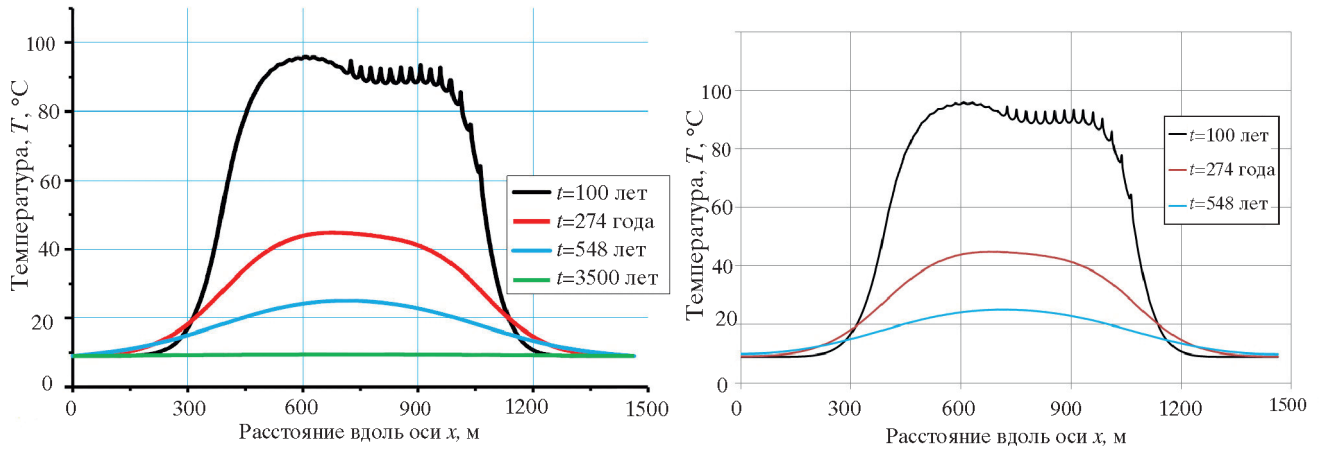


Рис. 26. Пространственные профили температур на этапе разогрева ПГЗРО

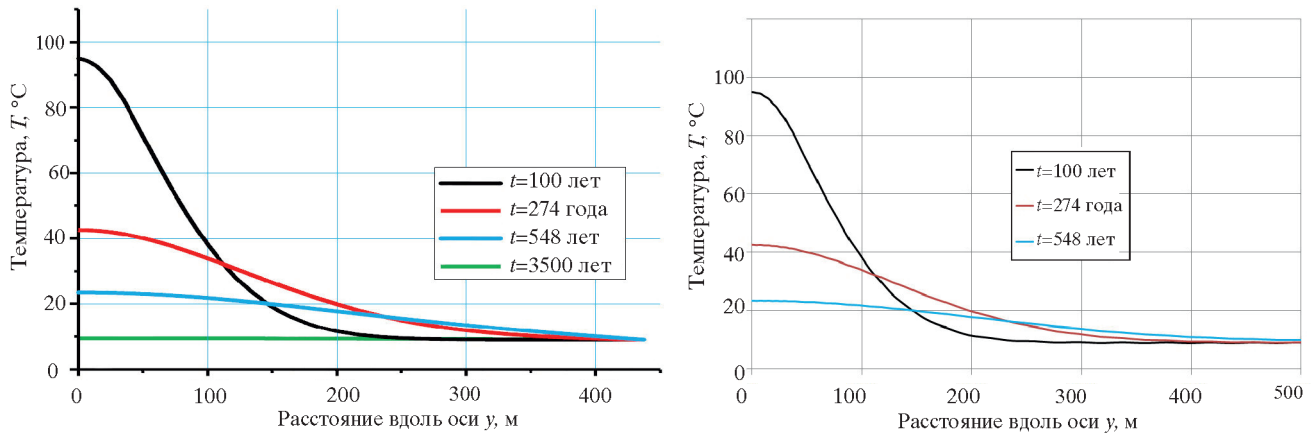
Расхождение между численным и аналитическим решением не превышает 1%, что позволяет сделать вывод о достаточной степени дискретизации конечно-элементной сетки на удалении на 10 м от вершины центральной скважины 8-й камеры и на 120 м над вершиной центральной скважины 14-й камеры.

На рис. 28 показаны графики изменения максимальных температур в процессе распространения тепла в ПГЗРО. Максимальные значения температур наблюдаются в центральной скважине 8-й камеры захоронения и составляют 111°C на момент времени 55 лет от начала захоронения.

Вдоль горизонтальной оси симметрии ПГЗРО



Вдоль вертикальной прямой, проходящей через центр 8-й камеры захоронения участка 1



Вдоль горизонтальной прямой, проходящей по вершинам скважин 8-й камеры захоронения участка 1

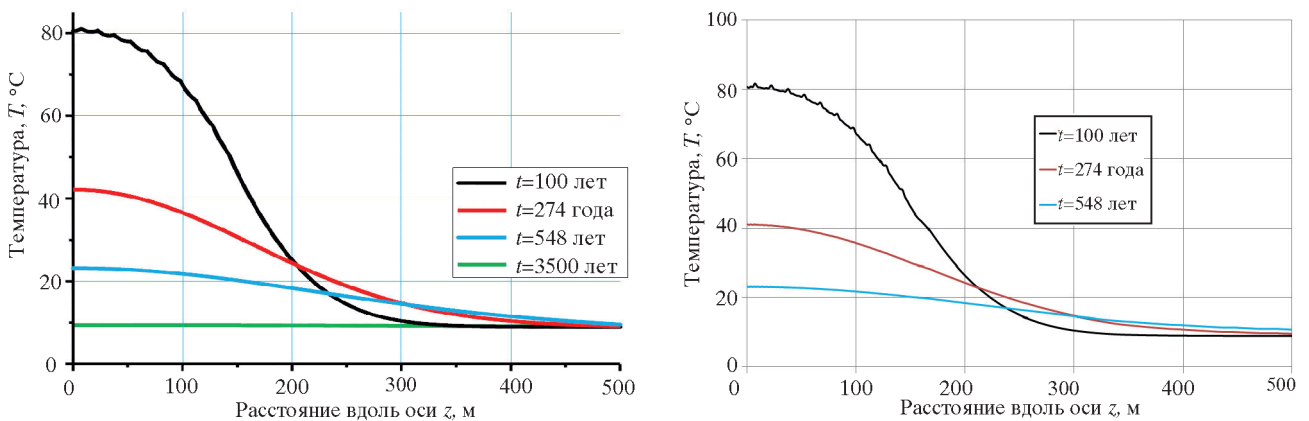


Рис. 27. Пространственные профили температур на этапе остывания ПГЗРО

Приведенные выше значения максимальных температур были получены на модели с равномерным распределением тепловыделения вдоль скважины (рис. 22). Для уточнения теплового и напряженного состояния в области наиболее нагретой скважины разработана конечно-элементная модель с более подробным описанием скважины (рис. 24). На рис. 29 показан характер распределения температуры в центральной скважине 8-й камеры на уточненной модели.

Расчетные значения максимальной температуры в остеклованных РАО достигают  $120^\circ\text{C}$  на момент времени 50 лет от начала захоронения.

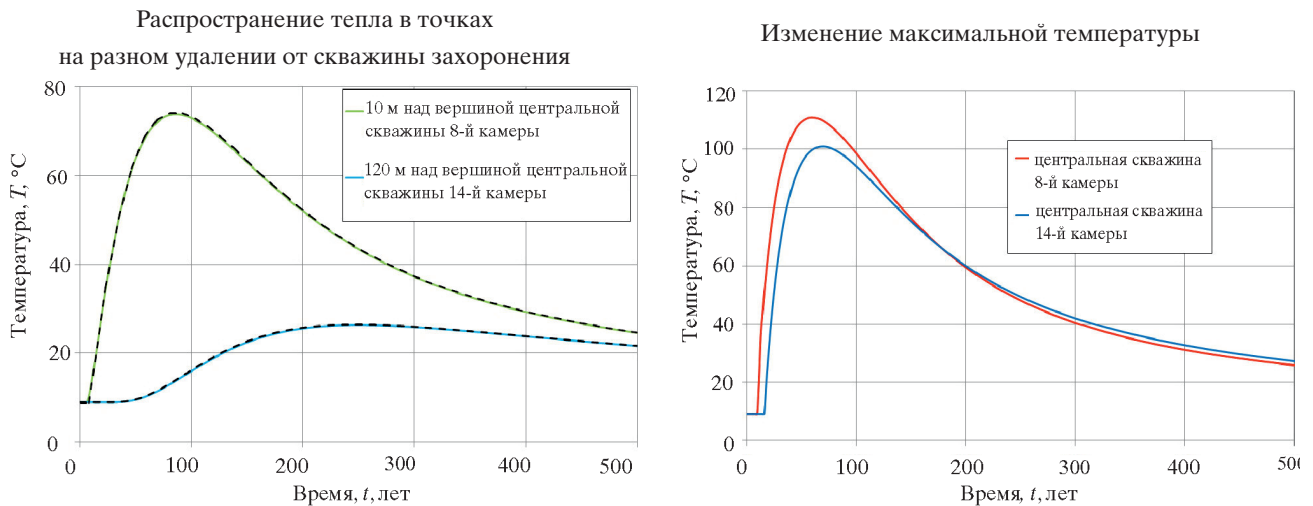


Рис. 28. Изменение температуры в процессе распространения тепла. Пунктиром показано аналитическое решение

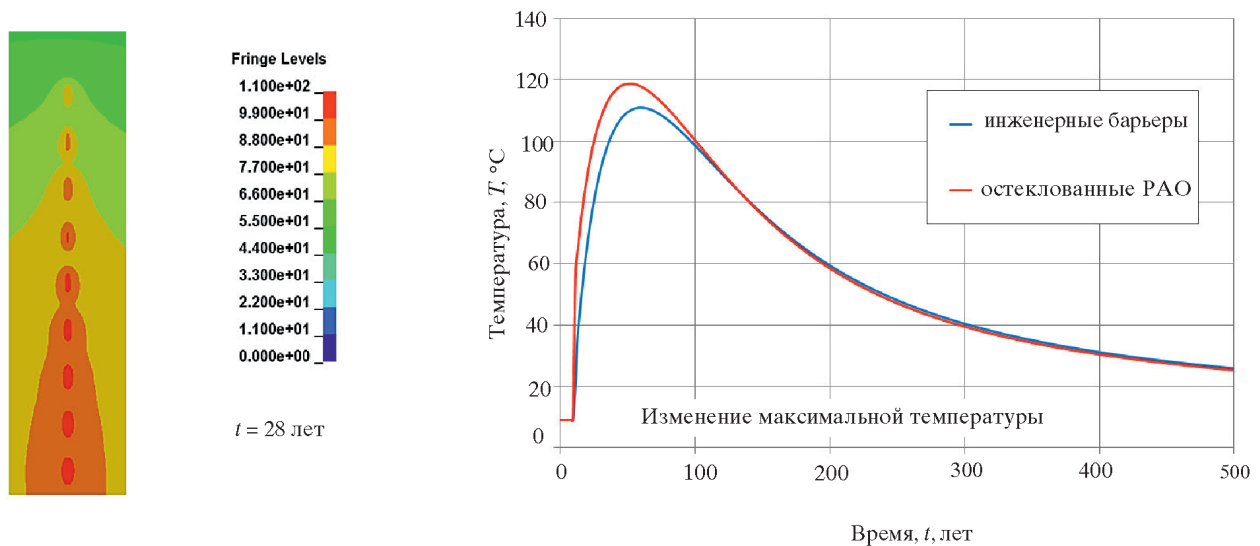


Рис. 29. Распределение температуры в центральной скважине 8-й камеры

### 2.3. Сравнение результатов расчетов теплового состояния ПГЗРО, полученных МКЭ и аналитическим методом

На рис. 30 приведено сравнение результатов аналитического и численного решений, полученных в РФЯЦ – ВНИИТФ.

Для сравнения между собой и с результатами численного расчета ИБРАЭ РАН в табл. 8 приведены значения температур для фиксированных моментов времени в фиксированных точках, лежащих на горизонтальной оси симметрии ПГЗРО. Точка 1 имеет координату  $x = 561$  м, что соответствует плоскости 8-й камеры первого участка; точка 2 имеет координату  $x = 972$  м, что соответствует плоскости, лежащей посередине между 10-й и 11-й камерами второго участка. Также в табл. 8 приведены координаты и температуры наиболее горячих точек.

Для точек 1 и 2 наибольшие отличия в результатах наблюдаются вблизи интенсивного тепловыделения (на момент 8 и 14 лет – в точке 1 и на момент 28 лет – в точке 2) и составляют 5%–13%, что может быть обусловлено различиями: описания геометрии источников тепла, размеров конечных элементов, шага счета по времени. При снижении интенсивности тепловыделения с течением времени отличия в результатах снижаются до уровня, не превышающего 3%. Температуры в наиболее горячих точках отличаются не более чем на 5%. Их координаты в основ-

ном совпадают с точностью  $\pm 3$  м, что соответствует размеру конечного элемента. Наибольшее отличие в определении координат горячих точек составляет 17 м на момент времени 28 лет. Это означает, что горячие точки определены в соседних камерах.

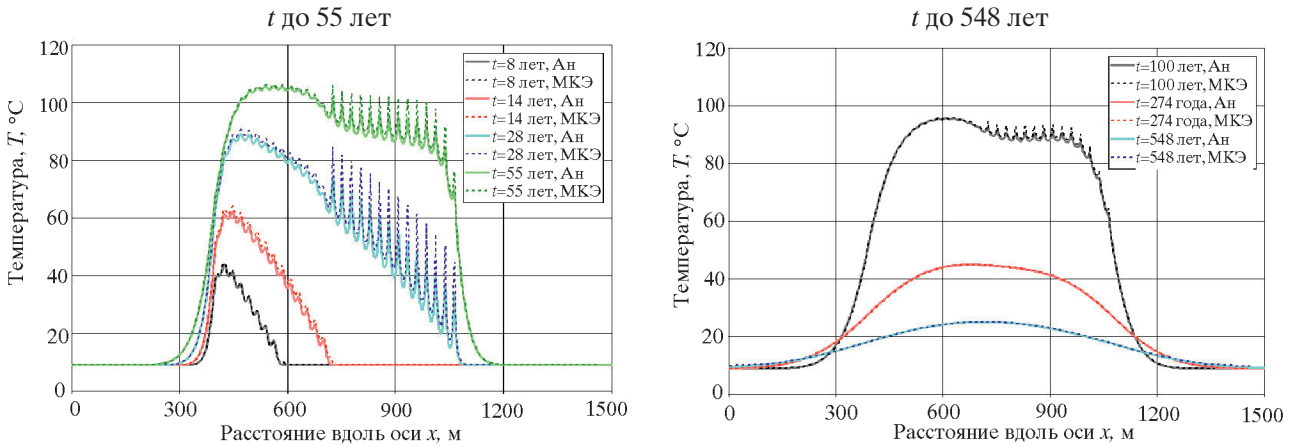


Рис. 30. Зависимости температуры вдоль горизонтальной оси симметрии ПГЗРО:  
 Ан – аналитическое решение; МКЭ – решение задачи методом конечных элементов

В целом отмечается хорошее согласование методик расчета используемых в РФЯЦ – ВНИИТФ и ИБРАЭ РАН.

Таблица 8

Сравнение температур вдоль горизонтальной оси симметрии ПГЗРО, полученных в результате численного и аналитического расчетов в РФЯЦ – ВНИИТФ и численного расчета ИБРАЭ РАН

Момент времени, $t$ , лет	Методика расчета	Температура в фиксированных точках, °С		Сравнение по наиболее горячей точке	
		Точка 1, $x = 561$ м (8-я камера первого участка)	Точка 2, $x = 972$ м (между 10-й и 11-й камерой второго участка)	(x, T)–координаты наиболее горячей точки	
				x, м	T, °С
8	ИБРАЭ РАН, МКЭ	15,2	9,0	431	42,2
	ВНИИТФ, Ан	17,5	9,0	423	44,0
	ВНИИТФ, МКЭ	17,0	9,0	423	44,6
14	ИБРАЭ РАН, МКЭ	45,3	9,0	430	62,0
	ВНИИТФ, Ан	45,8	9,0	446	62,2
	ВНИИТФ, МКЭ	47,7	9,0	447	63,9
28	ИБРАЭ РАН, МКЭ	85,2	29,2	487	89,2
	ВНИИТФ, Ан	84,2	28,2	470	89,1
	ВНИИТФ, МКЭ	86,1	31,0	470	90,7
55	ИБРАЭ РАН, МКЭ	106,6	85,6	563	106,6
	ВНИИТФ, Ан	105,6	84,1	561	105,6
	ВНИИТФ, МКЭ	106,2	85,8	561	106,2
100	ИБРАЭ РАН, МКЭ	95,2	86,4	605	96,0
	ВНИИТФ, Ан	94,9	85,9	607	95,8
	ВНИИТФ, МКЭ	95,0	87,0	608	96,0
274	ИБРАЭ РАН, МКЭ	42,6	37,0	676	45,0
	ВНИИТФ, Ан	42,7	37,3	682	45,0
	ВНИИТФ, МКЭ	42,7	37,3	682	45,0
548	ИБРАЭ РАН, МКЭ	23,4	20,9	714	24,9
	ВНИИТФ, Ан	23,5	21,0	706	25,2
	ВНИИТФ, МКЭ	23,5	21,0	706	25,2

Примечание: Ан – аналитическое решение; МКЭ – решение задачи методом конечных элементов.

## 2.4. Анализ напряженного состояния ПГЗРО и массива вмещающих пород

Как уже отмечалось, расчеты проводились МКЭ в связанной постановке (тепло + прочность), с учетом собственного веса вмещающей породы массива. На рис. 31 показаны компоненты напряженного состояния массива под действием собственного веса до заполнения камер захоронения. В табл. 9 приведены максимальные значения параметров полученного напряженного состояния.

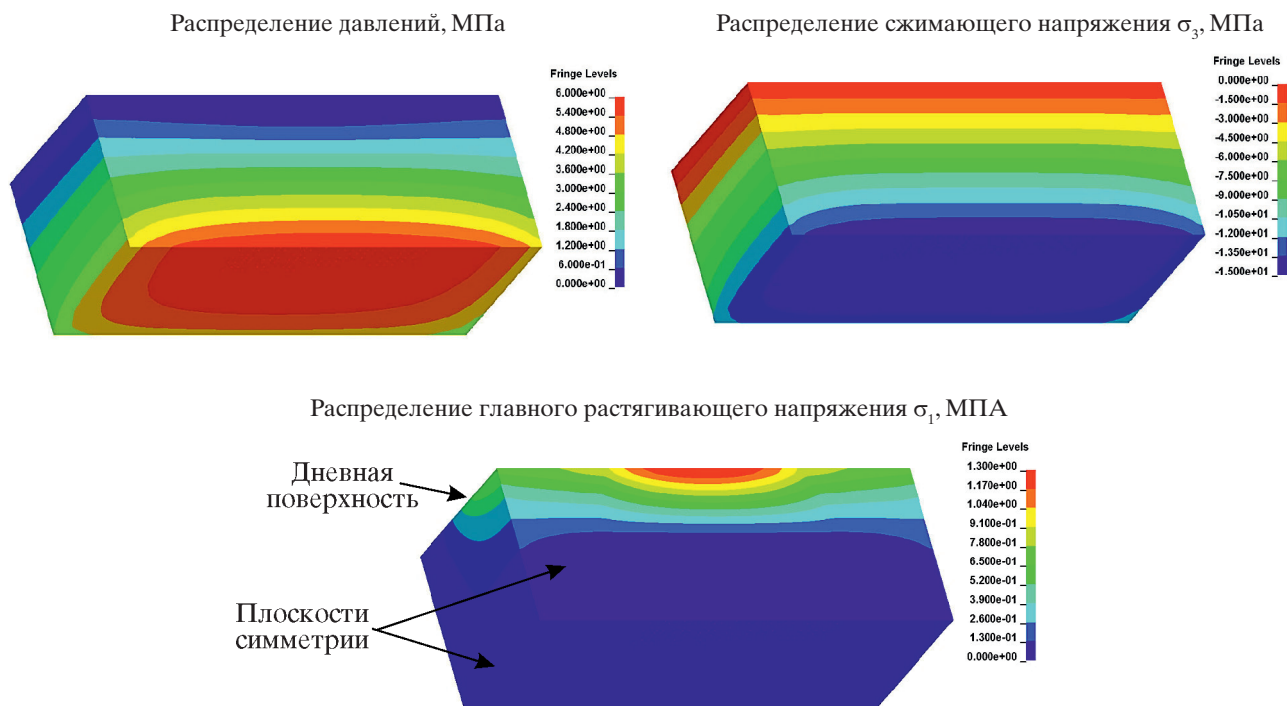


Рис. 31. Распределение компонентов НДС в массиве вмещающих пород под действием собственного веса, МПа

Таблица 9

Напряженное состояние массива под действием собственного веса

Компонента	Максимальное значение, МПа
Главное растягивающее напряжение $\sigma_1$	1,3
Главное сжимающее напряжение $\sigma_3$	15
Давление	6

Полученные расчетные значения параметров напряженного состояния массива под действием собственного веса не являются критическими, тем не менее они вносят дополнительный вклад в напряженное состояние при тепловыделении РАО с начала заполнения ПГЗРО.

На рис. 32 показаны распределения главного растягивающего напряжения  $\sigma_1$  внутри массива и на его поверхности в моменты достижения максимальных значений.

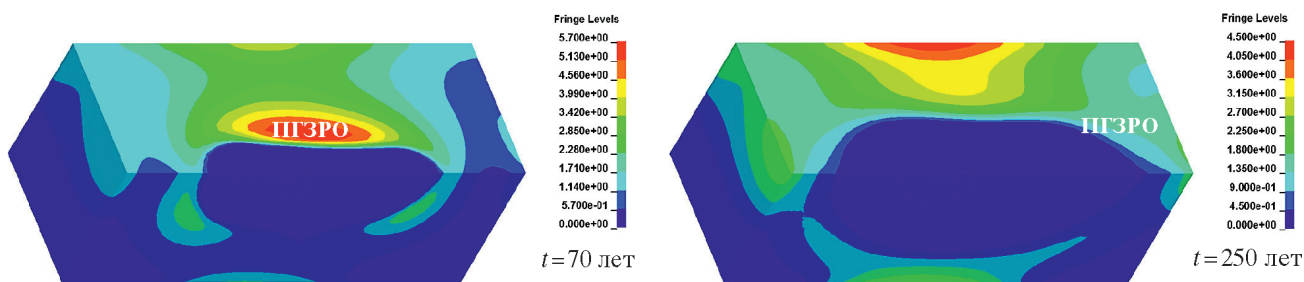


Рис. 32. Распределение главного растягивающего напряжения  $\sigma_1$  в массиве вмещающих пород, МПа

На рис. 33 показаны графики изменения максимальных значений главного напряжения  $\sigma_1$  внутри массива ( $\approx 120$  м над вершинами скважин центра ПГЗРО) и на поверхности захоронения РАО.

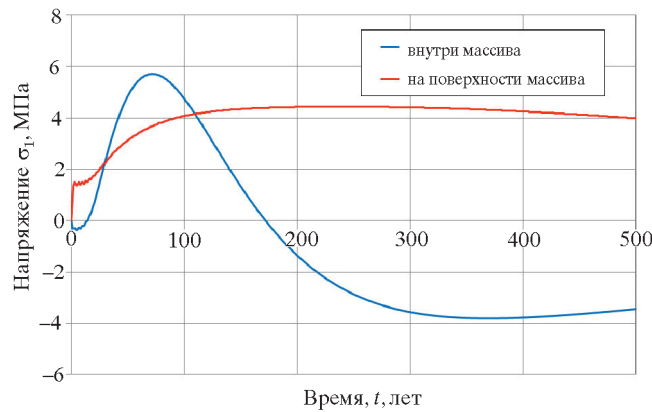


Рис. 33. Изменение максимальных значений главного напряжения  $\sigma_1$  в процессе жизненного цикла ПГЗРО

В табл. 10 приведены максимальные значения главного растягивающего напряжения  $\sigma_1$  и коэффициенты запаса по пределу прочности на растяжение.

Таблица 10

Максимальные значения главного растягивающего напряжения  $\sigma_1$  в массиве вмещающих пород

Расположение	Максимальные значения, МПа	Допустимые значения, МПа	Коэффициент запаса
Внутри массива	5,7	8	1,4
На поверхности массива	4,5		1,8

На рис. 34 показано распределение давлений и главного сжимающего напряжения  $\sigma_3$  в массиве вмещающих пород на момент достижения максимальных значений.

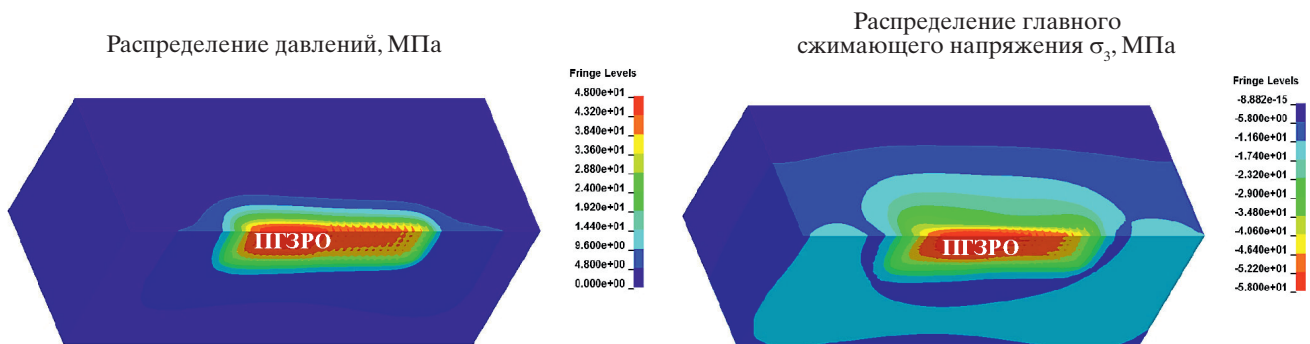


Рис. 34. Распределение компонентов НДС в массиве через 55 лет с начала заполнения, МПа

Максимальные сжимающие напряжения наблюдаются в центре 1-го участка захоронения через 55 лет с начала заполнения и составляют 58 МПа, что существенно ниже предела прочности на сжатие гранита (155 МПа). Коэффициент запаса по пределу прочности на сжатие составляет 2,7.

Для анализа прочности грунтовых массивов обычно используется критерий Кулона–Мора. При нагружении грунты работают преимущественно на сдвиг в направлении наименьшей прочности, поэтому сдвиговая прочность является определяющей прочностной характеристикой для грунтов. Разрушение реализуется в тот момент, когда величина сдвигового (касательного) напряжения достигает предела прочности грунта на сдвиг. Прочность грунта при сдвиге зависит от его свойств и силы внутреннего трения.



Критерий Кулона–Мора, определяющий прочность грунта на сдвиг, вычисляется по следующему выражению:

$$\tau = \sigma \operatorname{tg}(\varphi) + \sigma_s, \quad (11)$$

где  $\tau$  – предельные касательные напряжения;  $\sigma$  – нормальные к площадке сдвига напряжения;  $\varphi$  – угол внутреннего трения;  $\sigma_s$  – прочность грунта на срез (сцепление). Для гранита  $\sigma_s = 10$  МПа,  $\varphi = 35^\circ$ .

На рис. 35 показано распределение касательных напряжений в массиве вмещающих пород в момент достижения максимальных значений. Максимальные расчетные значения касательных напряжений составили 13,2 МПа. Минимальное значение коэффициента запаса по критерию Кулона–Мора составило 1,08. При этом относительный перепад температуры в наиболее нагруженном конечном элементе для гранита, удаленного от скважины на  $\approx (100\text{--}150)$  м над вершинами скважин ( $\delta T$ ) составил 0,07 (размер элемента в данной области задан  $2 \times 2 \times 5$  м). Значения максимальных напряжений, полученных на уточненной модели, практически совпадают с результатами, полученными на более грубой сетке. Следовательно, размер сетки выбран правильно.

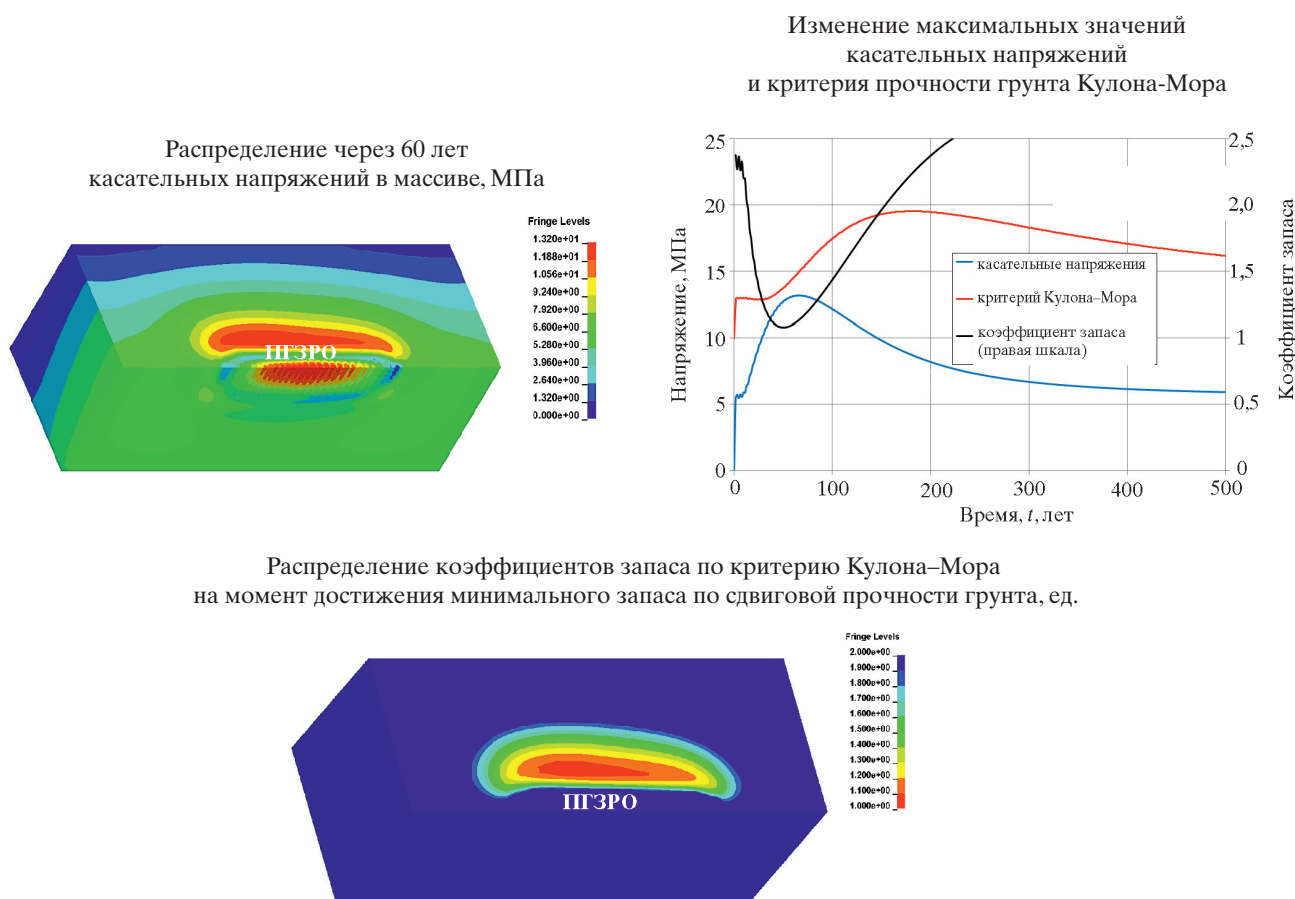


Рис. 35. Распределение компонентов НДС в массиве

Помимо плотности сетки на результаты расчетов оказывают влияние граничные условия, прикладываемые к модели. Результаты расчетов были получены на модели цельного гранитного блока горизонтальными размерами  $1500 \times 550$  м со свободными боковыми поверхностями. Для оценки влияния граничных условий были проведены дополнительные расчеты:

- в модели с горизонтальными размерами  $1500 \times 550$  м запрещен поворот боковых поверхностей (плоскости могут двигаться вдоль осей координат, но не поворачиваться);
- горизонтальные размеры модели увеличены до  $2500 \times 1050$  м (боковые поверхности свободны).

В табл. 11 приведены полученные значения напряженного состояния массива при разных граничных условиях.

Таблица 11

Напряженное состояние массива при задании разных граничных условиях

Параметр	1500×550 м, свободные боковые поверхности	1500×550 м, боковые поверхности с ограничением по повороту	2500×1050 м, свободные боковые поверхности
Максимальные растягивающие напряжения $\sigma_1$ на поверхности массива, МПа	4,5	5,4	5,5
Максимальные растягивающие напряжения $\sigma_1$ внутри массива, МПа	5,7	4,9	4,6
Максимальные касательные напряжения, МПа	13,2	12,3	12,3
Минимальный коэффициент запаса по критерию Кулона–Мора, ед.	1,08	1,16	1,18

При увеличении горизонтальных размеров модели массива наблюдается некоторое снижение напряжений внутри массива, при этом увеличиваются напряжения на его поверхности. Напряженное состояние, полученное на модели с горизонтальными размерами 1500×550 м, с боковыми поверхностями, ограниченными по повороту, близко к напряженному состоянию, полученному на модели размерами 2500×1050 м, со свободными боковыми поверхностями.

Для уточнения теплового и напряженного состояния в области наиболее нагретой скважины была использована конечно-элементная модель с более подробным описанием скважины захоронения (рис. 24). На рис. 36 показано распределение касательных напряжений в породе на границе с центральной скважиной 8-й камеры в момент достижения касательными напряжениями максимальных значений.

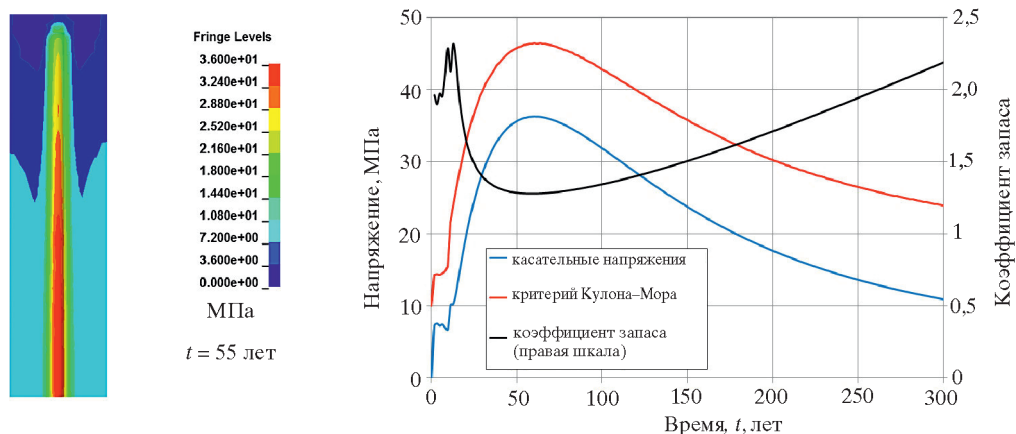


Рис. 36. Распределение касательных напряжений в породе на границе с центральной скважиной 8-й камеры и изменение максимальных значений касательных напряжений и критерия Кулона–Мора в процессе жизненного цикла ПГЗРО

Максимальные расчетные значения касательных напряжений составили 36 МПа. На рис. 36 показан график изменения максимальных значений касательных напряжений и критерия Кулона–Мора в породе на границе с центральной скважиной 8-й камеры в процессе жизненного цикла ПГЗРО.

Минимальное значение коэффициента запаса прочности породы на границе с центральной скважиной 8-ой камеры по критерию Кулона–Мора составило 1,28, при этом относительный перепад температуры в наиболее нагруженном конечном элементе ( $\delta T$ ) составил 0,03.

## 2.5. Обсуждение результатов решения в связанной постановке задачи оценки температурных полей и напряженного состояния ПГЗРО и массива окружающих пород

Знание теплового и напряженного состояния ПГЗРО требуется на всех этапах функционирования хранилища, начиная с загрузки РАО, и является важным аспектом обоснования безопасности ПГЗРО. Определяющим фактором, влияющим на тепловой режим объектов ПГЗРО, является тепловыделение РАО и физические свойства вмещающих пород. В рабочей зоне ПГЗРО и окружающем массиве пород существуют четыре взаимовлияющих источника, способных вызвать деструкцию (разрушение) геологической среды [4]. Это литостатическое давление, достигающее на глубине 500 м примерно 14 МПа (учтено в расчете заданием гравитационного ускорения), тектонические напряжения, которые могут превысить литостатические в 2 раза ( $\approx 30$  МПа и перпендикулярно  $\approx 10$  МПа [4], не моделируются в расчетах, не определена их ориентация относительно ПГЗРО); температурные поля от воздействия РАО 2-го класса опасности (в расчетах моделируется тепловыделение только РАО 1-го класса опасности); и геометрические размеры цельного гранитного (гнейсового) блока, в котором будет располагаться ПГЗРО (в расчетах все вмещающие и окружающие ПГЗРО горные породы представлялись цельным гранитным блоком).

В проведенном расчете не учитывается реальная конфигурация инженерных барьеров безопасности. В расчетах не учитывалось влияние на тепловой режим наличия зазоров между оболочками контейнеров и между контейнерами и породой; наличие различных по теплофизическим свойствам материалов. В расчете показано только, что учет ИББ (упрощенная модель) приводит к повышению температуры в матрице на  $10^\circ\text{C}$  и практически не сказывается на температуре окружающей породы.

Реальные размеры цельного гранитного блока, в котором будет расположен ПГЗРО, в реальности будут в меньшую сторону отличаться от принятых в расчетах. Для корректной оценки напряженного состояния вмещающих пород будет необходимо отказаться в модели от горизонтальной плоскости симметрии, а в окружении блока моделировать реальную неоднородную геологическую структуру (рис. 37) [11].

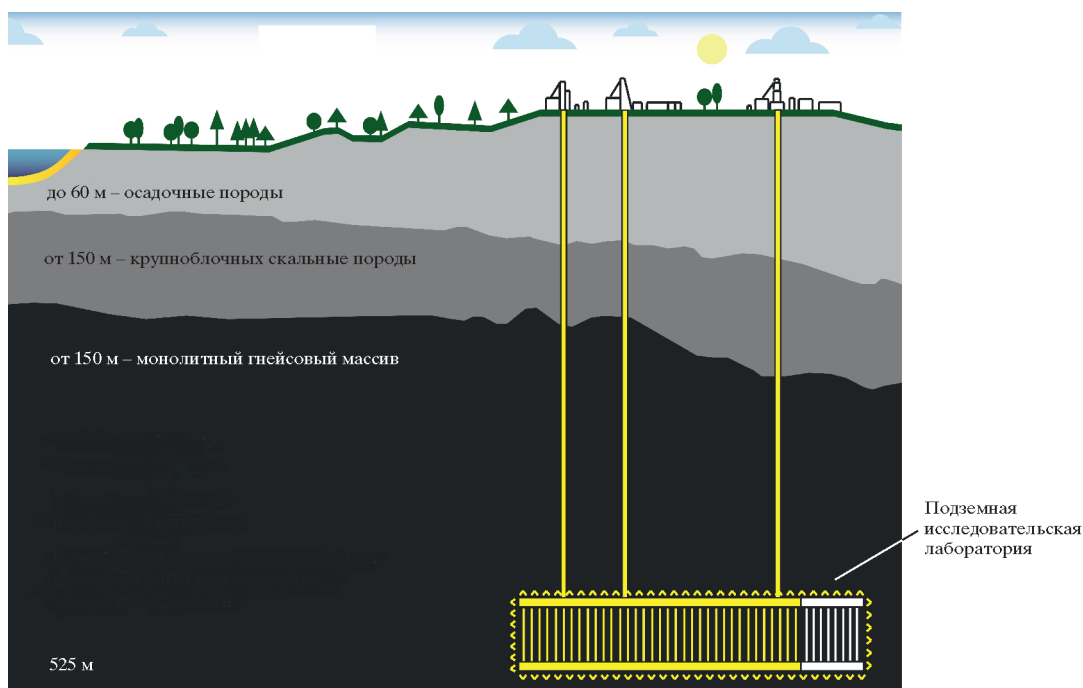


Рис. 37. Геологическая структура в районе ПГЗРО

В созданной расчетной модели не учитывалась конфигурация технологических выработок ПГЗРО (камеры, транспортно-технологические выработки). Подобные элементы являются концентраторами напряжений, что приводит к увеличению действующих напряжений во вмещающих породах.

Существует неопределенность задания теплофизических свойств вмещающих пород. Так, по данным работы [3] удельная теплопроводность образцов пород, отобранных на расстоянии нескольких сотен метров друг от друга, может различаться в 3 раза. Для получения более точных оценок эволюции теплового состояния ПГЗРО требуется уточнение входных данных для расчетов. В первую очередь это касается деформационных свойств материалов ИББ и геологической структуры (нелинейные диаграммы деформирования на растяжение, сжатие с указанием момента зарождения новых трещин), которые могут быть получены в рамках геологоразведочных работ и лабораторных исследований, проводимых в ПИЛ. Результаты работы ПИЛ позволят получить граничные напряжения и кинематические условия на границах блока, вмещающего ПГЗРО, его размеры для более точного 3D-моделирования напряженного состояния.

Имеющиеся в расчетной модели неопределенности по теплофизическим свойствам вмещающих пород, моделированию тектонических напряжений, геологической структуры вмещающего массива, а также неучет конфигураций технологических выработок ПГЗРО позволяют считать выполненную оценку теплонапряженного состояния ПГЗРО и вмещающего массива оценкой снизу.

## Заключение

Рассмотрена задача численного моделирования температурных полей в области скважин (инженерного барьера) и в массиве вмещающих ПГЗРО пород. Решение базировалось на исходных данных работы [3]. Постановка задачи полностью совпадает с данными, опубликованными ИБРАЭ РАН. Проведено независимое моделирование температурных полей, дополнительно в связанной постановке (тепло + прочность) получено напряженное состояние вмещающей породы на период до 500 лет после начала помещения в скважины контейнеров с высокоактивными радиоактивными отходами.

Анализ аналитических решений показал, что вполне допустимо использовать в качестве моделей тепловых источников РАО совокупность распределенных точечных источников для упрощения численного моделирования теплового состояния ПГЗРО и вмещающих пород. С использованием аналитических решений проведена независимая оценка точности получаемых численным моделированием величин температур и напряжений.

Численные решения, полученные в ИБРАЭ РАН и РФЯЦ — ВНИИТФ, хорошо согласуются между собой и соответствуют имеющимся аналитическим решениям, что обеспечивает определенную уверенность в корректности численных процедур расчета теплового состояния ПГЗРО.

Проведенные расчеты для ПГЗРО с 462 скважинами захоронения по 18 контейнеров с РАО 1-го класса опасности в каждой, имеющих начальное тепловыделение  $1 \text{ кВт/м}^3$  на первом участке и  $1,5 \text{ кВт/м}^3$  на втором (без учета тепловыделения РАО 2-го класса опасности), показали, что массив вмещающих ПГЗРО пород является теплонапряженным с большой вероятностью повреждения геологической структуры.

В настоящее время существуют значительные неопределенности исходных данных для создания уточненной расчетной модели ПГЗРО. Неопределенность исходных данных связана с неоднородностью геологических структур, так как теплофизические и прочностные свойства пород, слагающих Нижнеканский массив, существенно различаются по объему выбранного захоронения. Для получения более точных оценок теплового и напряженного состояния ПГЗРО

требуется уточнение входных данных для расчетов. В первую очередь это касается свойств материалов, геометрии геологических структур и принятых проектных решений по ПГЗРО. Проведенные исследования показали, что для получения реалистичной оценки теплового и напряженного состояния захоронения потребуется проведение многовариантных расчетов различными командами специалистов. Данная работа является первой выполненной по рассматриваемой теме в РФЯЦ – ВНИИТФ и ЮУрГУ (НИУ).

## Литература

1. **Татаринов, В. Н.** Влияние температуры на изоляционные свойства породных массивов при захоронении радиоактивных отходов [Текст] / В. Н. Татаринов, В. Н. Морозов, А. И. Каган, В. А. Пятыгин // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2015. – № 8. – С. 338–344.
2. Site-specific evaluation of safety issues for high-level waste disposal in crystalline rocks: Final report [Text] / M. Jobmann (editor), J. Flügge, J. Hammer et al. – TEC-28-2015-AB. – 31.03.2016. – 181 p.
3. **Дробышевский, Н. И.** Трехмерное численное моделирование теплового состояния пункта глубинного захоронения радиоактивных отходов в Нижнеканском массиве горных пород [Текст] / Н. И. Дробышевский, Е. В. Моисеенко, Р. А. Бутов, Ю. Н. Токарев // Радиоактивные отходы. – 2017. – № 1. – С. 64–73.
4. **Морозов, В. Н.** Подземная исследовательская лаборатория и сейсмические аспекты безопасности [Текст] / В. Н. Морозов, В. Н. Татаринов, В. И. Кафтан, А. И. Маневич // Радиоактивные отходы. – 2018. – № 3 (4). – С. 16–29.
5. **Мартынов, К. В.** Анализ локализации и сценария эволюции ПГЗРО на участке «Енисейский» [Текст] / К. В. Мартынов, Е. В. Захарова // Радиоактивные отходы. – 2018. – № 2 (3). – С. 52–62.
6. Критерии приемлемости радиоактивных отходов для захоронения: Федеральные нормы и правила в области использования атомной энергии [Текст]. – НП-093-14. – Утверждены 15.12.2014. – М., 2015. – С. 24.
7. **Лыков, А. В.** Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
8. **Елисеев, В. Н.** Алгоритм решения обобщенной задачи нестационарной теплопроводности в телах простой геометрической формы [Текст] / В. Н. Елисеев, В. А. Товстоног, Т. В. Боровкова // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. – Сер. Машиностроение. – 2017. – № 1. – С. 112–128.
9. Теплопроводность нестационарных процессов. – М.: Гостехиздат, 1948.
10. Теория упругости: пер. с англ. / под ред. Г. С. Шапиро. – М.: Наука, 1979.
11. **Абрамов, А. А.** Создание подземной исследовательской лаборатории на участке «Енисейский» Нижнеканского массива, состояние и дальнейшее развитие работ [Текст] / А. А. Абрамов, В. П. Бейгул // Электронный журнал «Атомная энергия 2.0». – [www/atomic-energy.ru](http://www/atomic-energy.ru)

**Абрамов** Алексей Витальевич  
**Бекетов** Александр Павлович  
**Рыкованов** Георгий Николаевич  
**Хрулёв** Александр Николаевич  
**Чернявский** Александр Олегович

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕПЛОВОГО И НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПУНКТА  
ГЛУБИННОГО ЗАХОРОНЕНИЯ РАДИОАКТИВНЫХ ОТХОДОВ**

Препринт № 261

Выпускающий редактор  
Компьютерная верстка  
Корректор

Т. Б. Пряхина  
О. В. Завьялова  
Н. И. Потеряхина

Подписано в печать 20.12.2019. Формат 70×90/16. Гарнитура TimesTenC.

Усл. п. л. 2,63. Тираж 50 экз. Заказ № 456

Оригинал-макет подготовлен Издательством РФЯЦ — ВНИИТФ.

Адрес издательства: 456770, г. Снежинск Челябинской обл.,

ул. Васильева, 13,

тел.: (351-46) 5-23-50, 5-22-75,

e-mail: L.S.Talantova@vniitf.ru,

[http: //www.vniitf.ru/](http://www.vniitf.ru/)

Отпечатано в ОНТИ РФЯЦ — ВНИИТФ